DIE VERWENDUNG DES ARAGOSCHEN KEILCOMPENSATORS ZUR MESSUNG DER BRECHUNGSEXPONENTEN VON FLÜSSIGKEITEN.

MIT EINEM ANHANG ÜBER DIE ABHÄNGIGKEIT DER BRECHUNGSEXPONENTEN DER SALZLÖSUNGEN VON DER CONCENTRATION.

INAUGURAL-DISSERTATION,

VERFASST

UND AM 17. FEBRUAR 1902

DER

HOHEN PHILOSOPHISCHEN FACULTÄT (II. SECTION)

DER

KGL. BAYR. LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT IN MÜNCHEN

ZUR

ERLANGUNG DER DOCTORWÜRDE

VORGELEGT

VON

JULIUS WALLOT

AUS OPPENHEIM.

ACAD. LAND. BAT. RUHL.

LEIPZIG,

JOHANN AMBROSIUS BARTH.

1902.

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

In den Sitzungsberichten der Pariser Académie des sciences vom Jahre 1840 findet sich eine Mitteilung von Arago[1]) über Interferenzversuche, bei denen er zur willkürlichen Verschiebung seiner Interferenzstreifen[2]) einen Keilcompensator benutzte. Es war dies eine Art Babinet'scher Compensator aus Glas, wie man ihn leicht herstellen kann, indem man ein Prisma mit kleinem brechendem Winkel durch einen Schnitt senkrecht zu seiner brechenden Kante in zwei Teile zerlegt und diese in entgegengesetzter Lage durch irgend eine Vorrichtung aneinander verschiebbar macht.

Der Apparat wurde von französischen Physikern später noch mehrmals zu ähnlichen Zwecken gebraucht, z. B. von Billet[3]) und Croullebois[4]); in Deutschland dagegen scheinen die älteren Compensatorformen — Arago hatte ausser dem Keilcompensator noch einen Plattencompensator construirt — durch den Jamin'schen[5]) Compensator vom Jahre 1858 völlig in den Hintergrund gedrängt worden zu sein.

So war es möglich, dass ich erst mehrere Monate, nachdem ich die vorliegende Arbeit auf Veranlassung des Hrn. Prof. Dr. Zehnder begonnen hatte, und erst bei der Lectüre eines französischen Werkes[6]) zufällig von der Vorgeschichte meines Apparates etwas erfuhr.

Auch Hr. Prof. Zehnder war von dem Gedanken ausgegangen, einen Keilcompensator zur willkürlichen Verschiebung

---

1) D. F. J. Arago, Compt. rend. **10.** p. 813. 1840.

2) Wie er diese herstellte, ist nicht zu ersehen.

3) F. Billet, Ann. de chim. et phys. (3) **64.** p. 385. 1862; Compt. rend. **67.** p. 1000. 1868.

4) M. Croullebois, Ann. de chim. et phys. (4) **20.** p. 136. 1870.

5) J. C. Jamin, Ann. de chim. et phys. (3) **52.** p. 163. 1858.

6) E. Verdet, Vorlesungen über die Wellentheorie des Lichtes. Deutsche Bearbeitung von K. Exner **1.** p. 93. Braunschweig 1881.

von Interferenzstreifen, und zwar speciell in Verbindung mit dem Interferentialrefractor, zu verwenden, zumal da die Keilverschiebung, im Gegensatze zu der Drehung des Jamin'schen Compensators, der Zahl der vorüberwandernden Streifen durchaus proportional ist; er erkannte aber sofort, dass man den Keilcompensator auch direct zur Messung der Brechungsexponenten von Flüssigkeiten, insbesondere auch von absorbirenden Flüssigkeiten, verwenden kann, und es ist vor allem diese neue Messmethode, zu deren eingehender Untersuchung er mich aufforderte.

Um das Wesen der Methode klar hervortreten zu lassen, vergleiche ich sie mit den anderen Verwendungsweisen des Interferentialrefractors.

Es ist eine Eigentümlichkeit dieses Apparates, dass man bei ihm nicht an bezifferten Scalen abliest, sondern Interferenzstreifen zählt, denen jede Numerirung und — im allgemeinen — auch jede Markirung mangelt. Die Folge davon ist, dass man ohne *stetige* Streifenverschiebung überhaupt nicht messen kann. Hiervon macht auch die bekannte Methode von Siertsema[1]) und Hallwachs[2]) keine Ausnahme; denn auch da muss die ruckartige Verschiebung der Streifen durch eine freiwillige stetige compensirt werden.[3])

Noch etwas anderes ist allen bis jetzt bekannten Messungen mit dem Interferentialrefractor gemeinsam: immer wird eines der Medien, die von den interferirenden Strahlenbündeln durchlaufen werden, auf eine Länge d durch ein Medium mit anderem Brechungsexponent ersetzt, und infolgedessen wandern die Streifen. Für alle Messungen gilt also die Grundgleichung:

$$\lambda s = d(N - n),$$

wenn man mit $N - n$ die Aenderung des Brechungsexponenten auf der Länge d, mit λ die Wellenlänge des benutzten homogenen Lichtes in dem Medium, auf das der Brechungsexponent bezogen wird, und mit s die vorbeiwandernde Streifenzahl bezeichnet.

1) L. H. Siertsema, De Jaminsche Interferentiaalrefractor, Proefschrift, Groningen 1890.

2) W. Hallwachs, Wied. Ann. **47**. p. 380. 1892.

3) Die stetige Bewegung des Auges, durch die man sonst die Verschiebung einer Marke auf einer unbezifferten Scala feststellen kann, kommt schon wegen des kleinen Gesichtsfeldes nicht in Betracht.

Aus dieser Gleichung und aus der Forderung, dass die Streifen stetig wandern, folgt sofort, dass es zwei grundsätzlich verschiedene Gruppen von Verwendungen des Interferentialrefractors giebt, die sich dadurch voneinander unterscheiden, dass bei der einen auf der *ganzen* Länge d *allmählich* die *Aenderung* $N - n$ entsteht, während sich bei der anderen die *volle Differenz* $N - n$ *allmählich* auf der Länge d verbreitet.

Das erste Verfahren ist das ursprüngliche und am meisten benutzte. Man unterwirft eine von den interferirenden Strahlen durchsetzte Schicht der zu untersuchenden Substanz von fester Dicke d einer stetigen Zustandsänderung, misst d und s — λ ist bekannt — und erhält so die mit der Zustandsänderung verbundene Aenderung des Brechungsexponenten $N - n$.

Das zweite Verfahren wird durch den Borgesius'schen Flüssigkeitscompensator[1]) und den Arago'schen Keilcompensator repräsentirt.

Der Grundgedanke des Borgesius'schen Apparates ist der folgende[2]) (Fig. 1): Man bringt in den Weg des *einen* der zwischen den Refractorplatten verlaufenden Strahlenbündel ein planparallel begrenztes Gefäss von unveränderlicher Länge, das von zwei durch eine planparallele Wand getrennten Flüssigkeiten mit den Exponenten N und n, deren Differenz gemessen werden soll, vollständig ausgefüllt ist. Verschiebt man durch irgend eine Vorrichtung die trennende Wand allmählich um die Strecke d, so wandert am Fadenkreuz des Refractorfernrohrs eine Streifenzahl s vorbei, die wieder durch

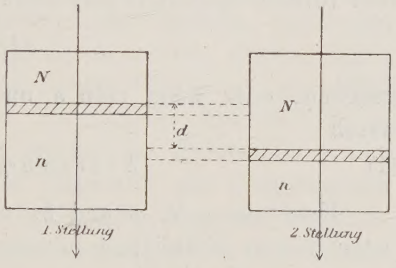

Fig. 1.

$$\lambda s = d(N - n)$$

gegeben wird.

Hier wächst also die Grösse d bei *fester* Differenz $N - n$ während des Versuches *stetig* an.

---

1) A. H. Borgesius, Wied. Ann. **54.** p. 221. 1895.

2) Die thatsächliche Ausführung ist etwas anders.

Genau dasselbe ist für den Arago'schen Keilcompensator charakteristisch (Fig. 2). Die Anordnung ist bei Benutzung des Interferentialrefractors die folgende: In den Weg des einen der zwischen den Refractorplatten verlaufenden Strahlenbündel bringt man den Doppelkeil, in den Weg des andern — damit der Gesamtgangunterschied nicht zu gross wird — eine planparallele Platte aus demselben Material, die ungefähr ebenso dick ist wie die beiden Keile, wenn sie einander überdecken. Wird der eine der beiden Keile, wie es die Figur zeigt, etwa durch eine feine Mikrometerschraube um eine Strecke e verschoben, so findet das Strahlenbündel, das die beiden Keile senkrecht zu ihren äusseren Begrenzungsflächen durchsetzt, in einer sich stetig vorlagernden Schicht von der Dicke d nicht mehr den Brechungsexponenten des äusseren Mediums n, sondern den des Keilmateriales N vor. Die im Refractorfernrohr vorüberwandernde Streifenzahl wird also wie früher durch

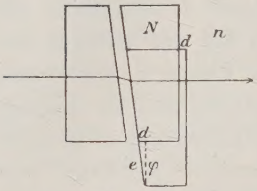

Fig. 2.

$$\lambda s = d(N - n)$$

gegeben, oder wenn man e und den Keilwinkel φ einführt, durch

(1) $$\lambda s = e \sin \varphi (N - n).$$

Kennt man N, φ und λ, und senkt man den Compensator in eine Flüssigkeit mit dem Brechungsexponenten n, so kann man durch Messung von s und e den Brechungsexponenten der Flüssigkeit bestimmen. Dies ist die von Prof. Zehnder vorgeschlagene Methode.

Die hier skizzirte Anordnung ist bis auf die den Compensator umgebende Flüssigkeit schon von Billet[1]) angegeben worden; von einer Benutzung des Compensators zur directen Messung von Brechungsexponenten habe ich dagegen nirgends in der Literatur etwas finden können.[2])

1) Er erzeugte die Interferenzstreifen durch seine Halblinsen.

2) In der neuesten Zeit hat auch Lummer einen Doppelglaskeil benutzt, jedoch zu anderem Zwecke: O. Lummer, Arch. Néerl. (2) **6**. p. 773. 1901.

Bei der Ableitung der Gleichung (1) wurde durch die Benutzung der Fig. 2 eine specielle Orientirung vorausgesetzt. Bei allgemeiner Orientirung erhält man eine viel verwickeltere Beziehung. Denn während in der Gleichung (1) die Brechungsexponenten der beiden Medien nur deshalb vorkommen, weil die optischen uud nicht die geometrischen Weglängen einzusetzen sind, hängt bei allgemeiner Orientirung die geometrische Weglänge selbst wieder von den Richtungsänderungen, die der Strahl durch Brechungen erleidet, und dadurch von den Brechungsexponenten ab.

Eine genauere theoretische Untersuchung, zu der ich jetzt übergehe, muss darüber entscheiden, ob und innerhalb welcher Grenzen mit der einfacheren Formel (1) gerechnet werden darf.

I. Die Theorie des Apparats.

Es handelt sich in diesem Abschnitt vor allem um die Verallgemeinerung der Gleichung (1), also um die Frage: Wie ändern sich die Gangunterschiede der in der Fadenkreuzebene des Beobachtungsfernrohrs interferirenden Strahlen, wenn man den beweglichen Keil des beliebig orientirten Compensators um eine geradlinige, beliebig gerichtete Strecke e verschiebt?

Da es sehr mühselig wäre, die Aufgabe ohne weiteres so allgemein durchzuführen, lasse ich bei der Untersuchung vorläufig den festen Keil und die Planplatte des Compensators und den Interferentialrefractor selbst ganz weg und betrachte *nur den beweglichen Keil* und einen *einzigen*, diesen in beliebiger Richtung durchsetzenden, homogenen *Lichtstrahl* (vgl. Fig. 4, S. 11). Ich fasse dann die Bahnen, die dieser Lichtstrahl vor und nach der Verschiebung des Keils durchläuft, als die Bahnen zweier voneinander unabhängiger Strahlen auf und berechne den Gangunterschied Δ, den diese nach ihrem Durchtritt durch den Keil haben.[1]) Es wird später (S. 19 f.)

1) Der Gangunterschied zweier Strahlen bezieht sich immer auf ihren Schnittpunkt; er hat für jedes homogene Medium einen bestimmten Wert. Bei parallelen Strahlen vergleicht man entsprechend den Schwingungszustand zweier Punkte, die auf derselben Normalebene liegen. — „Gangunterschied“ und „Phasenunterschied“ werden vielfach nicht scharf voneinander getrennt. Nach dem heute herrschenden Sprachgebrauch ist der Gangunterschied eine Länge, der Phasenunterschied dagegen ein

gezeigt werden, dass dieser Gangunterschied, von verschwindend kleinen Correctionen abgesehen, bereits die gesuchte, bei der thatsächlichen Versuchsanordnung vorüberwandernde Streifenzahl s liefert.

Der nächstliegende Weg zur Bestimmung von Δ wäre der, den Verlauf der Strahlen vor der Verschiebung und nach der Verschiebung, oder wie ich sie kürzer nennen will, der Strahlen a und b im Raume zu construiren und dann Stück für Stück die optischen Längen, d. h. die geometrischen Längen, multiplicirt mit den Brechungsexponenten, zu berechnen. In der That führt dieser Weg bei einiger Geschicklichkeit und Ausdauer im trigonometrischen Rechnen durchaus sicher zum Ziele. Die Formeln werden aber so complicirt und unübersichtlich, dass man sich besser nach Hülfsmitteln umsieht, die das verhältnismässig einfache Ergebnis auch auf einfachem Wege abzuleiten erlauben.

Ein solches recht fruchtbares Hülfsmittel ist ein Satz, den Helmholtz[1]) in der folgenden Form ausgesprochen hat:

„Wenn Lichtstrahlen von einem Punkt ausgegangen[2]) und durch beliebig viele Flächen von continuirlicher Krümmung[3]) gebrochen worden sind, stehen sie nach der letzten Brechung senkrecht auf jeder krummen Fläche, für deren sämtliche Punkte die optische Länge eines Strahles einen constanten Wert hat.“

Ursprünglich homocentrische Strahlen kommen also nach beliebig vielen Brechungen (oder Reflexionen) auf ihren Normalflächen ohne Gangunterschied an.

Winkel, und zwar ist der Phasenunterschied gleich dem Gangunterschied mal $2\pi/\lambda$. Unter dem Gange eines Strahles selbst versteht man wohl, soweit das Wort überhaupt gebraucht wird, eine bloss vom *Orte* abhängige Grösse, die man gleich dem Lichtweg setzen kann, den der Strahl bis zu dem gerade betrachteten Punkte zurückgelegt hat; die Phase dagegen ist eine Function des Ortes *und der Zeit*.

1) H. Helmholtz, Wissensch. Abhandl. 2. p. 153.

2) Nur derartige „homocentrische“ Strahlen sind bekanntlich interferenzfähig.

3) Der Satz gilt *praktisch* auch für Flächen mit scharfen Kanten und Spitzen, wie man sie bei den meisten Interferenzapparaten findet; man braucht sich nur die Kanten und Spitzen durch sehr kleine continuirliche Flächen abgerundet zu denken.

Da nun aber diese Normalflächen im allgemeinen eine recht verwickelte Gestalt haben, ist mit dem Satz in dieser allgemeinen Fassung noch nicht viel anzufangen. Seine Bedeutung tritt erst zu Tage, wenn man ihn specialisirt für den Fall, dass die ursprünglich homocentrischen Strahlen auch nach den Brechungen (oder Reflexionen) noch homocentrisch sind. Dann entsprechen dem leuchtenden Punkt als Objectpunkt lauter ganz bestimmte Bildpunkte, dann ist jede Kugelfläche um einen der Bildpunkte eine Normalfläche, und der Satz sagt aus, dass alle Strahlen in den Bildpunkten, in denen allein eine Interferenzwirkung möglich wäre, ohne Gangunterschied ankommen.

Glücklicherweise ist dieser Grenzfall der vollkommen homocentrischen Abbildung meistens annähernd[1]), oft, z. B. bei einem Bündel von parallelen Strahlen, die nur durch ebene Flächen abgebildet werden, sogar vollkommen verwirklicht. Man kann daher den folgenden Satz aufstellen:

Hülfssatz[2]): Ein Strahl, der von einer ebenen Fläche gebrochen oder reflectirt wird, kann in dieser beliebig parallel verschoben werden, ohne dass sich der Gangunterschied ändert, der nach der Brechung oder Reflexion zwischen ihm und einem beliebigen Parallelstrahl[3]) besteht.

Die Bedeutung dieses Hülfssatzes für die Berechnung von Interferenzapparaten liegt darin, dass man Strahlen, deren Gangunterschied unbequem zu finden ist, durch andere gleichwertige ersetzen kann, deren Gangunterschied leichter zu berechnen ist.

Bevor ich nun zu der Lösung der eigentlichen Aufgabe übergehe, berechne ich den bei dem Jamin'schen Interferentialrefractor auftretenden Gangunterschied. Einerseits wird dies die Anwendung des Hülfssatzes veranschaulichen,

---

1) Vgl. z. B. O. Lummer, Wied. Ann. **23.** p. 49. 1884.

2) Eine allgemeinere Fassung wäre die folgende: Strahlen, die von irgend einem Punkt ausgegangen sind und sich in demselben Bildpunkt wieder vereinigt haben, liefern mit einem durch diesen Bildpunkt gehenden Strahle alle denselben Gangunterschied.

3) Man beachte, dass diesem Strahle nur die eine Bedingung auferlegt wird, dass er in dem Medium, für das der Gangunterschied berechnet werden soll, dem erstgenannten Strahl parallel läuft.

andrerseits kann dann später auf die sich ergebende Formel zurückgewiesen werden.

Man denkt sich (Fig. 3) in der Oberfläche der ersten Refractorplatte den reflectirten Strahl GAJ nach dem Punkte C in die Lage HCK verschoben. Nach dem Hülfssatz kann man jetzt den Gangunterschied der Strahlen $GAFBL$ und HCK betrachten. Rechnet man den Punkt C zur Glasplatte und zieht man CD senkrecht zu AF und CE senkrecht zu BF, so ist nach dem Helmholtz'schen Satze der Gangunterschied der Punkte D und C derselbe wie der der Strahlen GA und HC im Aussenraum, und ebenso ist der Gangunterschied

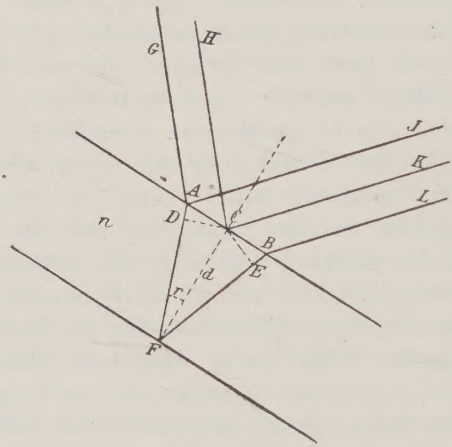

Fig. 3.

der Punkte C und E derselbe wie der der Strahlen CK und BL im Aussenraum. Ein Gangunterschied der Strahlen $GAFBL$ und HCK kommt daher nur dadurch zustande, dass der gebrochene Strahl den Weg DFE in der Platte zurücklegt. Der gesuchte Gangunterschied ist also $= 2nd\cos r$, wenn n der Brechungsexponent und d die Dicke der Platte und r der Einfallswinkel an der hinteren Plattenfläche ist.

Da durch die erste Platte, vorausgesetzt dass sie durchaus planparallel ist, der Parallelismus der Strahlen nicht gestört wird, so kann man sie in der Oberfläche der zweiten Platte genau in dieselbe Lage verschieben, ganz einerlei, in welchen Punkten sie dort in Wirklichkeit auftreffen, und ob sie dort

in derselben oder in verschiedenen Einfallsebenen gebrochen und zurückgeworfen werden. Daher ist der Gangunterschied der Strahlen nach ihrem Austritt aus der zweiten Platte bei allgemeinster Orientirung (die Buchstaben mit Strichen beziehen sich auf die zweite Platte, und i und i' sind die Einfallswinkel an den Vorderflächen der Platten):

$$(2) \qquad \begin{cases} \Delta = 2\,n\,d\cos r - 2\,n'\,d'\cos r' \\ \quad = 2\,d\sqrt{n^2 - \sin^2 i} - 2\,d'\sqrt{n'^2 - \sin^2 i'}. \end{cases}$$ [1])

Ich beginne jetzt mit der Berechnung des Gangunterschiedes der Strahlen a und b. Man nehme zunächst Fig. 4 zu Hülfe, die den beweglichen Keil und den ihn durch-

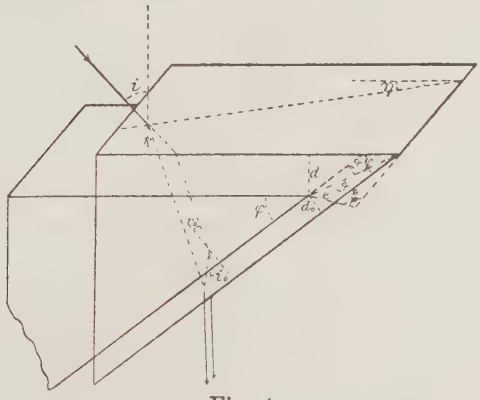

Fig. 4.

setzenden Lichtstrahl darstellt. Alle Richtungen sollen auf den Keil bezogen werden.

Der Keilwinkel sei wie früher φ; eine zu der Keilkante senkrechte Ebene heisse, wie es Brauch ist, ein Hauptschnitt

1) Der erste, der diese Formel ebenfalls mit Hülfe eines Ersatzstrahles, im allgemeinen jedoch nicht so einfach ableitete, war wohl D. Bobylew (Carl's Rep. **11.** p. 213. 1875). Bei E. Mascart (Ann. de chim. et phys. (4) **23.** p. 132 u. 141. 1871) vermisst man die nähere Erläuterung, warum die zweite Platte auch bei allgemeinster Orientirung dieselbe Aenderung des Gangunterschiedes bewirkt, wie die erste Platte. — Wie complicirt übrigens die Rechnungen werden, sobald man auf allgemeine Grundsätze verzichtet, das zeigen z. B. die meist noch nicht einmal allgemeinen Ableitungen in Wüllner's Lehrbuch der Experimentalphysik (5. Aufl., 1899) auf den p. 553—56, 557—59 u. 572—73 des 4. Bandes

des Keils. Die Richtung des von der Lichtquelle auf die „vordere“ Keilfläche auffallenden Strahles soll gegeben sein durch seinen Einfallswinkel i und durch den Winkel η, den seine Einfallsebene mit den Hauptschnitten des Keiles bildet. i und η können alle Werte von $-\pi/2$ bis $+\pi/2$ annehmen. i sei positiv, wenn der einfallende Strahl auf die Keilkante zu gerichtet ist; bei η braucht die Bedeutung der Vorzeichen nicht festgesetzt zu werden, da nur $\cos\eta$ vorkommen wird.

Die Verschiebung e denke ich mir auf einen Hauptschnitt projicirt; ϑ sei der spitze Winkel, den diese Projection mit der zweiten Keilfläche, die ich die „schiefe“ nenne, bildet, und zwar soll ϑ, wenn man die Projection der Verschiebungsrichtung um die Keilkante von einer Anfangslage in der schiefen Keilfläche aus nach der vorderen Keilfläche hin um 360^0 dreht, im ersten und dritten Quadranten dieser Drehung positiv, im zweiten und vierten negativ sein. Ich verzichte überhaupt darauf, die Richtung, in der die Mikrometerschraube gedreht wird, auf das Vorzeichen des Gangunterschiedes Δ und damit der Streifenzahl einwirken zu lassen, und ziehe es vor, den Gangunterschied und die Streifenzahl immer als positive Grössen zu berechnen. Endlich sei der Winkel zwischen der Verschiebungsrichtung und der Keilkante gleich ζ.

Im allgemeinen wird der Strahl bei seiner ersten Brechung (in der vorderen Keilfläche) in einer anderen Einfallsebene verlaufen als bei seiner zweiten Brechung (in der schiefen Keilfläche); ich unterscheide daher eine erste und eine zweite Einfallsebene. Die zweite Einfallsebene ist vor und nach der Verschiebung bei unveränderter Richtung ihrer Normalen in verschiedenen Lagen; ich spreche deshalb von den Ebenen $2a$ und $2b$.

Der Brechungsexponent des Keils sei N, der des äusseren Mediums n. N sei grösser als n.

Die vordere Fläche soll sich in der Richtung ihrer Normalen um d verschieben, die schiefe Fläche in der Richtung ihrer Normalen um d_0. Mit den Einfallsloten der beiden Flächen bilde der Strahl der Reihe nach die Winkel i, r (in der ersten Einfallsebene), r_0, i_0 (in der zweiten Einfallsebene).

Δ sei, wie schon bemerkt, der zu berechnende Gangunterschied der Strahlen a und b nach ihrem Wiedereintritt in das äussere Medium.

Es sei vorläufig vorausgesetzt, dass $\zeta = 90^0$ sei, dass also die Verschiebung in einem Hauptschnitt erfolge.

Ich betrachte nun zuerst die erste Einfallsebene, die durch Fig. 5 dargestellt ist. $B\,D\,E$ ist die Bahn des Strahles a, $B\,A\,A_0\,B_0$ die des Strahles b. Eine Verschiebung des Strahles a in die Lage $C\,A\,A_0$ zeigt, dass der Gangunterschied der beiden Strahlen a und b im Innern des Keils allein davon herrührt, dass der Strahl a den Weg $C\,A$ im äusseren Medium, der Strahl b aber den Weg $B\,A$ im Keil zurücklegt. Der Gangunterschied der Strahlen im Innern des Keils ist also

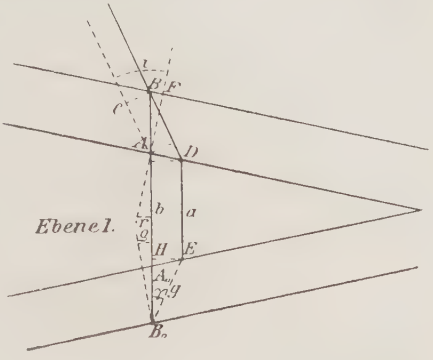

Fig 5.

(3a) $$\Delta' = N\,.\,A\,B - n\,.\,A\,C.$$

Zu diesem Gangunterschied ist, wenn die Strahlen aus dem Keile wieder in das äussere Medium zurückgetreten sind, ein gewisser Betrag hinzugekommen, und der scheint sich nicht so einfach berechnen zu lassen, da sich die beiden Strahlen a und b in verschiedenen Ebenen fortpflanzen. Der Hülfssatz beseitigt die Schwierigkeit. Man denkt sich den Strahl a parallel zu sich selbst verschoben, bis er im Innern des Keils mit dem Strahl b zusammenfällt. Der neue fingirte Strahl ist dem alten in der Ebene $2\,a$ vollständig gleichwertig, und man hat den grossen Vorteil, dass sich die Strahlen, deren Gangunterschied zu berechnen ist, jetzt in derselben Ebene, nämlich in der Ebene $2\,b$ (Fig. 6) fortpflanzen.

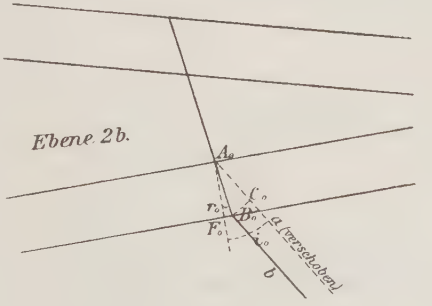

Fig. 6.

Der noch fehlende Gangunterschied Δ'' kann infolgedessen direct aus der Figur abgelesen werden:

$$\Delta'' = N . A_0 B_0 - n . A_0 C_0 . \tag{3 b}$$

Die Strecken AB, AC, $A_0 B_0$, $A_0 C_0$ sind leicht zu berechnen. Denn da die Ebene 1 auf der vorderen Keilfläche und die beiden Ebenen 2 auf der schiefen Keilfläche senkrecht stehen, so ist $AF = d$ und $A_0 F_0 = d_0$. Man erhält:

$$\left\{ \begin{aligned} AB &= \frac{d}{\cos r}, \\ AC &= d . \frac{\cos (i - r)}{\cos r}, \\ A_0 B_0 &= \frac{d_0}{\cos r_0}, \\ A_0 C_0 &= d_0 . \frac{\cos (i_0 - r_0)}{\cos r_0}, \end{aligned} \right. \tag{4}$$

und es wird

$$\Delta' = d . \left\{ \frac{N}{\cos r} - \frac{n . \cos (i - r)}{\cos r} \right\},$$

$$\Delta'' = d_0 . \left\{ \frac{N}{\cos r_0} - \frac{n . \cos (i_0 - r_0)}{\cos r_0} \right\}.$$

Durch Entwickeln von $\cos (i - r)$ und $\cos (i_0 - r_0)$ und durch die Einführungen:

$$n . \sin i = N . \sin r$$

$$n . \sin i_0 = N . \sin r_0$$

findet man hieraus sofort:

$$\Delta' = d . \{ N . \cos r - n . \cos i \}$$

$$\Delta'' = d_0 . \{ N . \cos r_0 - n . \cos i_0 \} .$$

Da $\zeta = 90^0$ vorausgesetzt ist, so ergeben sich d und d_0 sehr einfach aus Fig. 4:

$$d = e . \sin (\varphi - \vartheta)$$

$$d_0 = e . \sin \vartheta ,$$

und man erhält daher:

$$\begin{aligned} \Delta = e \{ &\sin (\varphi - \vartheta) . (N \cos r - n \cos i) \\ &+ \sin \vartheta . (N \cos r_0 - n \cos i_0) \}. \end{aligned} \tag{5}$$

Bevor ich nun die Winkel i_0, r_0 und r auf i zurückführe, gebe ich noch an, wie man die gefundene Gleichung auch ohne Anwendung des Hülfssatzes ableiten kann.

Für Δ' erhält man leicht mit den in die Fig. 5 gezeichneten Senkrechten dasselbe Resultat wie oben (3a). Für Δ'' ist eine Hülfsconstruction nötig. Man denkt sich eine Hülfsebene, die die beiden wieder in das äussere Medium hinausgetretenen einander parallelen Strahlen enthält. Diese Ebene schneidet die erste Einfallsebene in einer Geraden, von der (Fig. 5) die Strecke $g\,(B_0\,E)$ ein Stück ist. Das von B_0 auf den Strahl a gefällte Lot habe den Fusspunkt G. Zieht man nun noch $E\,H$ senkrecht zu $A\,B_0$, so ergiebt sich:

$$\Delta'' = N\,.\,B_0\,H - n\,.\,E\,G.$$

$E\,G$ ist die Projection der Strecke g auf den Strahl a. Um den zugehörigen Projectionswinkel α zu finden, habe ich alle in Betracht kommenden Richtungen in eine Kugel eingezeichnet (Fig. 7). Die $X\,Y$-Ebene stellt die vordere Keilfläche dar, die Z-Axe hat die Richtung des ersten Einfallslotes, die Y-Axe hat die der Keilkante. Mit dem ersten Einfallslot bildet das zweite, $K\,J$, in der $X\,Z$-Ebene den Winkel φ; die zu $K\,J$ senkrechte Ebene — die Punkte Y, $\mathcal{I}$, R, K gehören ihr an — entspricht der schiefen Keilfläche. $K\,L$ ist die Richtung der auffallenden Strahlen, $K\,M$ die der im Keil verlaufenden, $K\,N$ die der wieder in das äussere Medium getretenen Strahlen. Die Richtung von g sei die eines nach dem Punkte S gezogenen Kugelradius. $M\,S$ ist dann der Winkel $H\,B_0\,E = \gamma$; $M\,N$ stellt den Winkel $i_0 - r_0$ dar. $N\,S\,K$ ist ein Stück der Hülfsebene und $N\,S$ der gesuchte Winkel α, während der Winkel zwischen den Flächen $M\,S\,K$ und $M\,N\,K$, d. h. der Winkel zwischen den beiden Einfallsebenen, mit β bezeichnet werde.

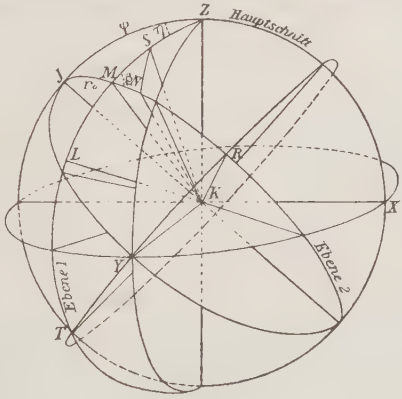

Fig. 7.

Es ist dann nach dem Cosinussatz:

$$\cos\alpha = \cos\gamma\cos(i_0 - r_0) + \sin\gamma\sin(i_0 - r_0).\cos\beta.$$

Da aber $\cos\gamma = B_0 H/g$ und $\sin\gamma = EH/g$ ist, so erhält man für das gesuchte Stück EG den Wert:

$$EG = g.\cos\alpha = B_0 H.\cos(i_0 - r_0) + EH.\sin(i_0 - r_0).\cos\beta.$$

Im ganzen ist also

$$\Delta'' = N.(B_0 A_0 + A_0 H) - n.\{(B_0 A_0 + A_0 H).\cos(i_0 - r_0) + EH.\sin(i_0 - r_0).\cos\beta\}.$$

$N.B_0 A_0 - n.B_0 A_0.\cos(i_0 - r_0)$ ist nach (3 b) und (4) das alte Δ''; ich weise daher nur nach, dass der Rest gleich Null ist. ϱ sei der Winkel $A_0 EH$ (Fig. 5). Dann ist der Rest

$$= N.A_0 E.\sin\varrho - n.\{A_0 E.\sin\varrho.\cos(i_0 - r_0) + A_0 E.\cos\varrho.\sin(i_0 - r_0).\cos\beta\}.$$

Für N setzt man $n.\sin i_0/\sin r_0$ ein, für ein im zweiten Glied auftretendes $\sin^2 r_0$ ausserdem $1 - \cos^2 r_0$, wodurch der Rest die folgende Gestalt annimmt:

$$n.A_0 E\left\{\sin\varrho.\frac{\sin(i_0 - r_0)}{\operatorname{tg} r_0} - \cos\varrho.\sin(i_0 - r_0).\cos\beta\right\}.$$

Nun ist in Fig. 7 MRT ein rechtwinkliges sphärisches Dreieck mit dem rechten Winkel bei R; seine Hypotenuse ist $MT = 90^0 + \varrho$ (vgl. Fig. 5), seine eine Kathete $MR = 90^0 - r_0$, und der von beiden eingeschlossene Winkel ist $RMT = 180^0 - \beta$. Es ist also

$$\cos(180^0 - \beta) = \frac{\operatorname{tg}(90^0 - r_0)}{\operatorname{tg}(90^0 + \varrho)}$$

oder

$$\cos\beta = \frac{\operatorname{tg}\varrho}{\operatorname{tg} r_0},$$

sodass der Rest

$$n.A_0 E.\sin(i_0 - r_0).\left\{\frac{\sin\varrho}{\operatorname{tg} r_0} - \frac{\cos\varrho.\operatorname{tg}\varrho}{\operatorname{tg} r_0}\right\} = 0$$

wird, wie es sein muss.

i_0, r_0 und r sind nun durch i auszudrücken. Es ist:

$$\sin r = \frac{n}{N} \sin i,$$

$$N^2 \cos^2 r = N^2 - n^2 \sin^2 i = R_1^2. \tag{6}$$

$\cos r_0$ entnimmt man der Fig. 7:

$$\cos r_0 = \cos r \cos \varphi + \sin r \sin \varphi \cos \eta$$

oder

$$N \cos r_0 = R_1 \cos \varphi + n \sin \varphi \sin i \cos \eta.$$

Ferner ist:

$$\sin i_0 = \frac{N}{n} \sin r_0,$$

und

$$\begin{aligned} n^2 \cos^2 i_0 &= n^2 - N^2 \sin^2 r_0 = n^2 - N^2 + N^2 \cos^2 r_0 \\ &= n^2 - N^2 + R_1^2 \cos^2 \varphi + n^2 \sin^2 \varphi \sin^2 i \cos^2 \eta \\ &\quad + 2 n R_1 \sin \varphi \cos \varphi \sin i \cos \eta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n^2 \cos^2 i_0 &= n^2 - N^2 \sin^2 \varphi + 2 n R_1 \sin \varphi \cos \varphi \sin i \cos \eta \\ &\quad + n^2 \sin^2 i (\sin^2 \varphi \cos^2 \eta - \cos^2 \varphi) = R_2^2. \end{aligned} \tag{7}$$

Man erhält also schliesslich:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta}{e} &= \sin (\varphi - \vartheta)(R_1 - n \cos i) \\ &\quad + \sin \vartheta (R_1 \cos \varphi + n \sin \varphi \sin i \cos \eta - R_2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta}{e} &= \sin \varphi \cos \vartheta \,.\, R_1 - n \sin (\varphi - \vartheta) \cos i \\ &\quad + \sin \vartheta (n \sin \varphi \sin i \cos \eta - R_2). \end{aligned} \tag{8}$$

Diese Formel wird viel übersichtlicher, wenn φ, i und ϑ klein sind, wie es der Beschaffenheit des Keils und seiner Einstellung entspricht. Ich setze voraus, dass auf der rechten Seite von (8) alle Combinationen der Winkel i und ϑ von höherer als der zweiten Ordnung vernachlässigt werden dürfen. Ausserdem soll $\sin^3 \varphi$ von derselben Ordnung sein wie i und ϑ.

Dann wird R_1 nach (6):

$$R_1 = N - \frac{n^2}{2N} i^2.$$

Für R_2 erhält man nach (7), indem man nach $\sin i$ entwickelt und berücksichtigt, dass R_2 nur mit $\sin \vartheta$ multiplicirt vorkommt:

$$R_2 = \sqrt{n^2 - N^2 \sin^2 \varphi} + \frac{n N \sin \varphi \cos \varphi \cos \eta}{\sqrt{n^2 - N^2 \sin^2 \varphi}} i,$$

und dies lässt sich weiter zu

$$R_2 = n - \frac{N^2}{2n} \sin^2 \varphi + N i \sin \varphi \cos \varphi \cos \eta$$

vereinfachen. Führt man diese Annäherungen in (8) ein und drückt man zugleich alle Cosinus der kleinen Winkel durch die Winkel selbst aus, so erhält man:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta}{e} = N \sin \varphi &- \frac{N}{2} \vartheta^2 \sin \varphi - \frac{n^2}{2N} i^2 \sin \varphi \\ &- n \sin \varphi + \frac{n}{2} \vartheta^2 \sin \varphi + \frac{n}{2} i^2 \sin \varphi \\ &+ n \vartheta - \frac{n}{2} \vartheta \sin^2 \varphi \\ &+ n i \vartheta \sin \varphi \cos \eta \\ &- n \vartheta + \frac{N^2}{2n} \vartheta \sin^2 \varphi - N i \vartheta \sin \varphi \cos \eta. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta = e \sin \varphi \Big\{ (N - n) &+ \left(\frac{n}{2} - \frac{n^2}{2N} \right) i^2 + \left(\frac{N^2}{2n} - \frac{n}{2} \right) \vartheta \sin \varphi \\ &- \left(\frac{N}{2} - \frac{n}{2} \right) \vartheta^2 - (N - n) i \vartheta \cos \eta \Big\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (9) \qquad \Delta = e \sin \varphi (N - n) \Big\{ 1 &+ \frac{n}{2N} i^2 + \frac{N + n}{2n} \vartheta \sin \varphi \\ &- \frac{\vartheta^2}{2} - i \vartheta \cos \eta \Big\}. \end{aligned}$$

Ich habe mich jetzt nur noch von der Voraussetzung freizumachen, dass der Keil senkrecht zu seiner Kante verschoben werde. Da selbstverständlich der Gangunterschied der Strahlen a und b nur von der Anfangs- und der Endstellung des Keils, aber nicht von dem Verschiebungswege abhängt, so kann man sich die Verschiebung zusammengesetzt denken aus einer Verschiebung in einem Hauptschnitt, die oben behandelt worden ist, und aus einer parallel zu der Keilkante, die an dem Gangunterschied nichts ändert. Dieser bleibt also derselbe, nur ist in die Formel nicht mehr die thatsächliche Verschiebung e einzutragen, sondern ihre Pro-

jection auf den Hauptschnitt (vgl. Fig. 4) $e \sin \zeta$. Man kommt so zu der Formel:

$$(10a) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta = e \sin \varphi \sin \zeta (N - n) \Big\{ 1 + \frac{n}{2N} i^2 + \frac{N+n}{2n} \vartheta \sin \varphi \\ - \frac{\vartheta^2}{2} - i \vartheta \cos \eta \Big\}. \end{aligned} \right.$$

Diese Gleichung gilt natürlich auch für ein n, das grösser ist als N, nur ist nach den früheren Festsetzungen dann $n - N$ statt $N - n$ einzuführen.

Der Gangunterschied der Strahlen a und b ist demnach nur dann der Differenz $N - n$ proportional, wenn i und $\vartheta = 0$ sind, d. h. wenn der betrachtete Lichtstrahl auf die vordere Keilfläche senkrecht auffällt und die schiefe Keilfläche sich in sich selbst verschiebt.

Es muss nun die Frage beantwortet werden, in welchem Zusammenhang der Gangunterschied Δ der Strahlen a und b mit der im Fernrohr des Interferentialrefractors beobachteten Streifenverschiebung steht.

Ich mache zuerst die vereinfachenden Voraussetzungen, dass die Refractorplatten und die Platte des Compensators absolut planparallel seien, und dass auch der Doppelkeil, als Ganzes betrachtet, wie eine absolut planparallele Platte wirke. Dann bleiben die beiden durch Spaltung an der Vorderfläche der ersten Refractorplatte entstandenen Teilstrahlen S_1 und S_2 im äussern Medium (in der Luft) einander beständig parallel, und der Gangunterschied, den der Interferentialrefractor allein bewirkt, hängt daher nach Gleichung (2) nur von der Richtung der Strahlen S_1 und S_2 ab.

Es ist nun leicht zu zeigen, dass man das Beobachtungsfernrohr unter diesen Umständen auf unendlich einstellen muss, wenn man möglichst scharfe Interferenzstreifen sehen will Denn ein auf unendlich eingestelltes Fernrohr vereinigt alle Strahlen derselben Richtung in demselben Punkt der Bildebene; alle Strahlenpaare, die durch Teilung der unzählig vielen von der Lichtquelle in einer bestimmten Richtung ausgesandten Strahlen entstanden sind, treffen daher in demselben Punkt der Bildebene und mit demselben Gangunterschied zusammen, und das Interferenzbild kann überhaupt nicht reiner sein, als es thatsächlich ist.

Wenn nun die Interferenzstreifen im Fernrohr infolge einer Verschiebung des beweglichen Keils wandern, so müssen sich die Gangunterschiede der in der Bildebene interferirenden Strahlenpaare geändert haben. Der Grundriss Fig. 8, bei dem die beiden Refractorplatten der Übersichtlichkeit halber ganz weggelassen sind, soll diese Verhältnisse veranschaulichen. S_1 und S_2 sind zwei durch Teilung an der ersten Refractorplatte entstandene Strahlen; S_1 durchsetzt die Planplatte des Compensators, S_2 den Doppelkeil, und zwar verfolgt S_2 vor der Verschiebung des beweglichen Keils die Bahn a. S_1 und S_2 a werden dann (nachdem sie in Wirklichkeit noch durch die zweite Refractorplatte abgelenkt worden sind) durch die auf unendlich eingestellte Linse L auf dem Schirme T im Inter-

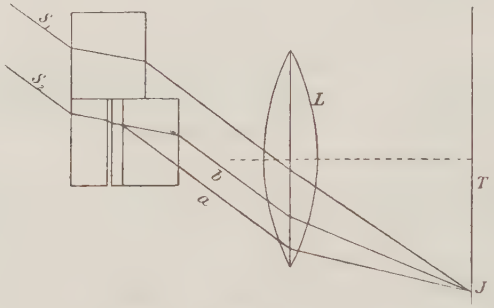

Fig. 8.

ferenzpunkt J vereinigt. Wird nun der bewegliche Keil verschoben (in der Figur ist die entsprechende Dickenänderung übertrieben gross gezeichnet), so läuft S_2 in der Bahn b. Da aber die Strahlen a und b einander parallel sind, und die Linse auf unendlich eingestellt ist, so geht der Strahl b durch denselben Interferenzpunkt J, und für die Streifenverschiebung in J ist direct der Unterschied der Gangunterschiede a gegen S_1 und b gegen S_1 oder der Gangunterschied der Strahlen a und b im Punkte J massgebend. Nimmt man nun noch an, dass die Strahlen a und b durch die Linse homocentrisch abgebildet werden[1]), so ist der Gangunterschied der Strahlen a und b im

1) Diese Annahme ist sicher gerechtfertigt, zumal da die Strahlen S_2 a und S_2 b einander thatsächlich sehr benachbart sind und der Interferenzpunkt J sehr nahe der Linsenaxe liegt.

Punkte J mit ihrem Gangunterschied zwischen dem Doppelkeil und der Linse identisch. Dieser Gangunterschied der Strahlen a und b zwischen dem Doppelkeil und der Linse wird aber durch (10a) gegeben; für die Zahl der in dem Interferenzpunkt J vorüberwandernden Streifen gilt also die Gleichung:

$$(10)\quad \left\{ \lambda s = e \sin\varphi \sin\zeta\,(N-n)\left\{1 + \frac{n}{2N} i^2 + \frac{N+n}{2n} \vartheta \sin\varphi - \frac{\vartheta^2}{2} - i\vartheta\cos\eta\right\}. \right.$$

In der Praxis fällt der Interferenzpunkt J immer mit dem Schnittpunkt des Fadenkreuzes zusammen, unter den Strahlen S_1 und S_2 sind daher solche zusammengehörige Strahlen zu verstehen, die durch die Objectivlinse des Fernrohrs im Schnittpunkt des Fadenkreuzes vereinigt werden.

Es muss noch darauf hingewiesen werden, dass bei der Ableitung der Gleichung (10a) vorausgesetzt wurde, der betreffende Lichtstrahl S_2 durchsetze zuerst die vordere und dann die schiefe Fläche des beweglichen Keils, oder was dasselbe ist, zuerst den beweglichen und dann den festen Keil. Thatsächlich durchläuft der Lichtstrahl die in Fig. 8 dargestellten umgekehrten Wege, und zwar aus folgenden Gründen: Nach Gleichung (10) darf man die einfache Gleichung (1) nur dann benutzen, wenn — von anderen Bedingungen abgesehen — der Winkel i sehr klein ist. Man muss den beweglichen Keil also so einstellen, dass die Strahlen S_2 auf seine vordere Fläche senkrecht auffallen. Da nun die Strahlen S_2 durch den Schnittpunkt des Fadenkreuzes gehen müssen, so ist diese Einstellung eine Fixirung des beweglichen Keiles relativ zum Fernrohr. Sie muss mit dem Gauss'schen Ocular geschehen, und hierbei ist es ohne Zweifel das beste, die Fläche, auf die es ankommt, d. h. die vordere Fläche des beweglichen Keils, dem Fernrohr selbst möglichst zu nähern, wie es durch die Anordnung der Fig. 8 geschehen ist. Auf die Gültigkeit der Gleichung (10) hat diese Aenderung gar keinen Einfluss. Denn durch eine Parallelverschiebung kann man immer erreichen, dass die Strahlen a und b der Fig. 4 auf die *schiefe* Fläche als *ein* ungeteilter Strahl auffallen.

Wie steht es nun, wenn die Refractorplatten und die Planplatte des Compensators nur mangelhaft planparallel sind

und auch der Doppelkeil nicht vollkommen wie eine planparallele Platte wirkt?

Die nächste Folge davon ist, dass die Interferenzerscheinung nicht mehr so rein und scharf ist wie früher. Denn da die ins Fernrohr eintretenden Teilstrahlen jetzt divergiren oder convergiren, so liegen die Interferenzstreifen nicht mehr im Unendlichen, sondern auf einer Fläche im Endlichen, und die Strahlenpaare, die von den verschiedenen Punkten der Lichtquelle ausgehen und in demselben Punkte der Bildebene zusammentreffen, interferiren dort nicht mehr alle zu derselben Intensität. Mit zunehmender Divergenz oder Convergenz der Strahlen können die Unterschiede der sich übereinanderlagernden Helligkeiten so gross werden, dass gar keine Streifen mehr zu sehen sind.

Man wird also, schon um schöne Streifen zu erhalten, die obigen Voraussetzungen zu verwirklichen suchen; insbesondere wird man durch eine besondere Einstellung den Doppelkeil möglichst zu einer planparallelen Platte machen. Strenggenommen ist ja auch nur dann die Bedingung des senkrechten Einfalls vollkommen erfüllt.

Die Frage, ob auch jetzt noch allein der Gangunterschied der Strahlen a und b für die Streifenverschiebung in Betracht kommt, kann hier nicht mit voller Gründlichkeit behandelt werden. Ich muss mich darauf beschränken, die Untersuchung so weit zu führen, dass ein Urteil über die Grössenordnung einer allenfalls anzubringenden Correction möglich ist.

Von dem Fernrohr soll jetzt ganz abgesehen werden. Ich betrachte den Schnittpunkt des Fadenkreuzes als das von dem Objectiv entworfene Bild eines anderen Punktes, den ich den Hauptinterferenzpunkt nenne, und nehme an, dass es nur auf die durch die Keilverschiebung veranlasste Aenderung der Gangunterschiede in diesem Punkte ankomme.

Die Lage des Hauptinterferenzpunktes kann theoretisch nur durch sehr complicirte Betrachtungen[1]), auf die ich nicht näher eingehe, gefunden werden. Da aber während der

1) W. Feussner, Wied. Ann. **14.** p. 545. 1881; A. Wangerin, Pogg. Ann. **131.** p. 497. 1867; L. Sohncke u. A. Wangerin, Wied. Ann. **12.** p. 1 u. 201. 1881; L. H. Siertsema, l. c.

Verschiebung des Keils am Fernrohr nichts verstellt wird, so kann man den Hauptinterferenzpunkt jedenfalls als einen durchaus festen, durch die Einstellung des Fernrohrs von vornherein gegebenen Punkt ansehen.

Von jedem Punkte der Lichtquelle gehen in jedem Augenblicke zwei Strahlen S_1 und S_2 aus, die nachher im Hauptinterferenzpunkt interferiren. Wir betrachten ein solches Paar etwas näher. Der eine der beiden Strahlen S_1 wird an der vorderen Fläche der ersten Refractorplatte reflectirt, tritt durch die Planplatte des Compensators, wird an der Rückfläche der zweiten Refractorplatte reflectirt und geht schliesslich durch den Hauptinterferenzpunkt. Der Lichtweg, den er bis zu seiner Ankunft im Hauptinterferenzpunkt zurückgelegt hat, ist während der ganzen Verschiebung derselbe, braucht also, da es sich nur um die *Aenderung* des im Hauptinterferenzpunkt zwischen S_1 und S_2 bestehenden Gangunterschiedes handelt, nicht berechnet zu werden.

Der andere Strahl S_2 wird zuerst an der Rückseite der ersten Refractorplatte reflectirt, tritt dann durch den Doppelkeil, wird an der zweiten Refraktorplatte reflectirt, und geht schliesslich durch den Hauptinterferenzpunkt.

Wird nun der bewegliche Keil verschoben, so gehen natürlich immer noch von jedem Punkt der Lichtquelle zwei Strahlen durch den Hauptinterferenzpunkt. An die Stelle von S_2 oder genauer ausgedrückt von $S_2\,a$ ist aber ein anderer Strahl S_2' getreten, der *schon von der Lichtquelle ab eine andere Bahn* durchlaufen hat, und der Gangunterschied dieses Strahles gegen den unverschobenen $S_2\,a$ kommt für die Streifenverschiebung in Betracht.

Man erkennt leicht, dass die hiernach an der Gleichung (10) anzubringende Correction nur sehr klein sein kann. Denn sie wird in drei immer annähernd verwirklichten Fällen gleich Null, nämlich 1. wenn das Fernrohr auf unendlich eingestellt werden muss, wie oben gezeigt wurde; 2. wenn die Winkel i und $\vartheta = 0$ sind, weil dann die Strahlen $S_2\,a$ und $S_2\,b$ und damit auch S_2' zusammenfallen, und 3. wenn die Lichtquelle unendlich weit entfernt ist, weil dann S_2' durch Parallelverschiebung in $S_2\,b$ übergeführt werden kann.

Ich berechne die Correction unter den folgenden verein-

fachenden Voraussetzungen: Von einem Punkte der Lichtquelle Q (Fig. 9) soll der Strahl S_2 direct auf den vollkommen planparallel gedachten Doppelkeil K fallen, dessen anfängliche Dicke D, dessen Dickenänderung d sei. ϑ sei gleich Null, i dagegen habe einen von Null verschiedenen Wert. Nach dem Durchtritt durch den Doppelkeil soll der Strahl S_2 noch an einer zu den äusseren Flächen des Doppelkeils parallelen Fläche F reflectirt werden. J sei der Hauptinterferenzpunkt.

Die Figur veranschaulicht den Verlauf der Strahlen. Vor der Keilverschiebung geht durch den Hauptinterferenzpunkt J der Strahl $S_2\,a$, nach der Verschiebung dagegen der Strahl S_2', der mit $S_2\,a$ bei seinem Austritt aus der Lichtquelle einen sehr kleinen Winkel ε bildet, während $S_2\,b$ ziemlich entfernt von J in der Richtung $A\,B\,C$ verläuft. Bei der Ableitung der Gleichung (10a) wurde einfach der Gangunterschied der Punkte C und J berechnet, die jetzt hinzuzufügende optische Länge Δ_0 ist gleich der Differenz der Lichtwege der Strahlen S_2' und $S_2\,b$, gerechnet von Q bis zu den Punkten J und C.

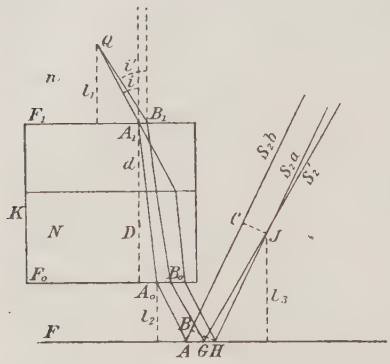

Fig. 9.

Die Einfallswinkel der Strahlen S_2 und S_2' seien i und i', sodass $i' = i + \varepsilon$ ist. Ferner sei der Abschnitt $A_1\,B_1$, den die Strahlen $S_2\,b$ und S_2' auf der ersten abbildenden Fläche F_1 ausschneiden, gleich u_1; der Abschnitt $A_0\,B_0$, den die genannten Strahlen auf der der Lichtquelle abgewandten Keilfläche F_0 ausschneiden, sei um u_0 grösser als u_1; der darauffolgende Abschnitt $A\,G$ auf der Fläche F sei um u_2 grösser als $u_1 + u_0$ und $G\,H$ endlich sei mit u_3 bezeichnet.

Die gesuchte optische Länge Δ_0 ist:

$$\Delta_0 = n(Q\,B_1 - Q\,A_1) + N(B_1\,B_0 - A_1\,A_0) + n(B_0\,G - A_0\,A) - n\,.\,A\,B + n(G\,J - B\,C).$$

Dieser Ausdruck erhält eine sehr einfache Gestalt, wenn man zunächst den Winkel ε als unabhängige Veränderliche

einführt. Die einzelnen Glieder sind leicht zu berechnen: Man wendet z. B. auf das Dreieck GHJ den Sinussatz an; es ergiebt sich:

$$GJ = u_3 \cdot \frac{\cos i}{\sin \varepsilon},$$

und, da BH parallel zu CJ ist:

$$HJ = BC = u_3 \cdot \frac{\cos i'}{\sin \varepsilon}.$$

Daher ist:

$$GJ - BC = u_3 \cdot \frac{\cos i - \cos i'}{\sin \varepsilon}.$$

Auf demselben Wege erhält man:

$$B_0 G - A_0 A = u_2 \cdot \frac{\cos i - \cos i'}{\sin \varepsilon},$$

$$Q B_1 - Q A_1 = u_1 \cdot \frac{\cos i - \cos i'}{\sin \varepsilon}.$$

Ferner ist (r hat dieselbe Bedeutung wie früher):

$$B_1 B_0 - A_1 A_0 = (D + d)\left(\frac{1}{\cos r'} - \frac{1}{\cos r}\right)$$

und

$$AB = d(\operatorname{tg} i - \operatorname{tg} r)\sin i.$$

Ausserdem besteht die Beziehung:

$$u_1 + u_0 + u_2 + u_3 = AH$$

oder

$$(11) \quad u_1 + u_2 + u_3 = d(\operatorname{tg} i - \operatorname{tg} r) - (D + d)(\operatorname{tg} r' - \operatorname{tg} r).$$

Daher ist schliesslich:

$$\begin{aligned} \Delta_0 &= n\,d\,(\operatorname{tg} i - \operatorname{tg} r)\left(\frac{\cos i - \cos i'}{\sin \varepsilon} - \sin i\right) \\ &\quad + (D + d)\left\{N\left(\frac{1}{\cos r'} - \frac{1}{\cos r}\right) - n\,(\operatorname{tg} r' - \operatorname{tg} r)\cdot\frac{\cos i - \cos i'}{\sin \varepsilon}\right\}, \\ &= n\,d(\operatorname{tg} i - \operatorname{tg} r)\cos i \operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2} \\ &\quad + \frac{D + d}{\cos r \cdot \cos r'}\left\{N(\cos r - \cos r') - n \sin(r' - r)\left(\cos i \operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2} + \sin i\right)\right\}. \end{aligned}$$

Die geschweifte Klammer ergiebt den Wert Null, wenn man in ihr die Näherungswerte:

$$\cos r = 1 - \frac{n^2}{2N^2} i^2,$$

$$\cos r' = 1 - \frac{n^2}{2N^2} (i + \varepsilon)^2,$$

$$\sin (r' - r) = \frac{n}{N} \varepsilon$$

einführt und i und ε als kleine Grössen betrachtet. Es ergiebt sich so für Δ_0 der einfache Ausdruck:

$$(12) \qquad \Delta_0 = n \,.\, d \,.\, \left(i - \frac{n}{N} i\right) \cdot \frac{\varepsilon}{2} = d(N - n) \cdot \frac{n}{2N} \,.\, i\,\varepsilon.$$

Es sei darauf hingewiesen, dass alle Längen, mit Ausnahme von d, bei der Ableitung weggefallen sind. Man kann daraus schliessen, dass man ohne vereinfachende Annahmen im wesentlichen zu demselben Resultat gekommen wäre.

Will man Δ_0 für einen bestimmten Fall wirklich berechnen, so muss der unbekannte Winkel ε noch durch die Entfernungen der Lichtquelle und des Hauptinterferenzpunktes ausgedrückt werden. Ich bezeichne den Abstand des Punktes der Lichtquelle Q von F_1 mit l_1, den Abstand der Flächen F_0 und F mit l_2 und den Abstand des Hauptinterferenzpunktes von F mit l_3.

Man findet nun z. B. aus dem Dreieck $Q A_1 B_1$, indem man eine Senkrechte von A_1 auf $Q B_1$ fällt, dass

$$\sin \varepsilon = \frac{u_1}{l_1} \,.\, \cos i \cos i'$$

ist. Ebenso ergiebt sich:

$$\sin \varepsilon = \frac{u_2}{l_2} \,.\, \cos i \cos i'$$

und

$$\sin \varepsilon = \frac{u_3}{l_3} \,.\, \cos i \cos i'.$$

Hieraus folgt:

$$\sin \varepsilon (l_1 + l_2 + l_3) = (u_1 + u_2 + u_3) \cos i \cos i'$$
$$= \{d (\operatorname{tg} i - \operatorname{tg} r) - (D + d) (\operatorname{tg} r' - \operatorname{tg} r)\} \cos i \cos i'$$

nach (11).

Führt man nun dieselben Näherungswerte ein wie früher, so erhält man

$$\varepsilon(l_1 + l_2 + l_3) = d\,i\,\frac{N-n}{N} - (D+d)\,\frac{n}{N}\,\varepsilon,$$

oder, wenn l_1 und l_3 gegen l_2 und $D+d$ gross sind,

$$\varepsilon(l_1 + l_3) = d\,i\,\frac{N-n}{N}\,.$$

Hiernach und nach (12) ist also in der geschweiften Klammer des Ausdrucks (10) noch ein Glied

$$\frac{d}{l_1 + l_3}\,i^2 \cdot \frac{n}{2\,N^2}(N-n)$$

anzubringen. Setzt man z. B. $l_1 = 20$ cm, $l_3 = 50$ cm[1]), $d = 0{,}1$ cm, $i = 10^{-2}$, $n = 1{,}3$, $N = 1{,}5$, so wird das Glied kleiner als 10^{-8}, es ist also sicher zu *vernachlässigen.*

In der Gleichung (10) ist daher die gesuchte Verallgemeinerung der Gleichung (1) gefunden.

Bei der praktischen Verwendung des Compensators nimmt ein Glastrog die zu untersuchenden Flüssigkeiten auf. Es genügt wohl, darauf hingewiesen zu haben, dass dieser Trog schwach prismatisch sein darf, ohne dass dies auf die Schärfe der Streifen oder auf die Genauigkeit der Messungen einen Einfluss hätte.

Es handelt sich jetzt darum, die Grenzen festzustellen, innerhalb deren mit der Gleichung (1) gerechnet werden darf. Denn selbstverständlich ist es durch keine Einstellungsmethode möglich, i und ϑ vollkommen gleich Null und ζ vollkommen gleich 90^0 zu machen, wodurch freilich (10) sofort in (1) überginge. Von einer Einstellung des Winkels ζ habe ich sogar ganz abgesehen, da der Proportionalitätsfactor $\sin\varphi \sin\zeta/\lambda$, auf den auch noch die Mängel der Mikrometerschraube einwirken[2]), viel besser durch einen Eichversuch eliminirt wird.

Im folgenden soll also untersucht werden, wie der aus den Beobachtungen abgeleitete Brechungsexponent der zu unter-

1) Ein einfacher Versuch mit dem Fernrohr ergab, dass dieser Wert niedrig gegriffen ist.

2) Vgl. p. 57.

suchenden Flüssigkeit durch unvollkommene Einstellung der Winkel i und ϑ beeinflusst wird. Es soll dabei vorausgesetzt werden, dass nicht nur der Proportionalitätsfactor der Gleichung (10), sondern auch der Brechungsexponent des Keiles N durch Eichbeobachtungen eliminirt werde. Die Einstellung sei bei beiden Eichversuchen und beim Hauptversuch dieselbe. Ich charakterisire die zu untersuchende Flüssigkeit durch den Index 3, die Eichflüssigkeiten dagegen durch die Indices 1 und 2. Die in der letzten Klammer der Gleichung (10) hinter der Eins folgenden sehr kleinen Grössen sollen durch α_1, α_2, α_3 abgekürzt werden; die Länge $\lambda/(\sin\varphi \sin\zeta)$ sei gleich L und der Quotient $s/e = q$.

Dann sind die Ausgangsgleichungen:

$$(13) \qquad \begin{cases} L\,q_1\,(1-\alpha_1) = N - n_1, \\ L\,q_2\,(1-\alpha_2) = N - n_2, \\ L\,q_3\,(1-\alpha_3) = N - n_3. \end{cases}$$

Da

$$(n_2 - n_1)\,n_3 + (n_3 - n_2)\,n_1 + (n_1 - n_3)\,n_2 = 0$$

ist, so erhält man:

$$\{q_1\,(1-\alpha_1) - q_2\,(1-\alpha_2)\}\,n_3 + \{q_2\,(1-\alpha_2) - q_3\,(1-\alpha_3)\}\,n_1 + \{q_3\,(1-\alpha_3) - q_1\,(1-\alpha_1)\}\,n_2 = 0$$

und

$$n_3 = \frac{q_1\,n_2 - q_2\,n_1 + q_3\,(n_1 - n_2)}{q_1 - q_2 - (\alpha_1\,q_1 - \alpha_2\,q_2)} - \frac{\alpha_1\,q_1\,n_2 - \alpha_2\,q_2\,n_1 + \alpha_3\,q_3\,(n_1 - n_2)}{q_1 - q_2 - (\alpha_1\,q_1 - \alpha_2\,q_2)}.$$

Nun ist bei kleinem α_1 und α_2 nach der bekannten Entwicklung:

$$\frac{1}{q_1 - q_2 - (\alpha_1\,q_1 - \alpha_2\,q_2)} = \frac{1}{q_1 - q_2} + \frac{\alpha_1\,q_1 - \alpha_2\,q_2}{(q_1 - q_2)^2}.$$

Bezeichnet man daher den Wert, den man für n_3 erhält, wenn man i und ϑ vernachlässigt, mit $|\,n_3\,|$, also

$$(14) \qquad |\,n_3\,| = \frac{q_1\,n_2 - q_2\,n_1 + q_3\,(n_1 - n_2)}{q_1 - q_2},$$

so ist nach einer einfachen Umformung

$$(n_3 - |\,n_3\,|)(q_1 - q_2)^2 = (n_1 - n_2)\{q_1\,q_2\,(\alpha_2 - \alpha_1) + q_2\,q_3\,(\alpha_3 - \alpha_2) + q_3\,q_1\,(\alpha_1 - \alpha_3)\}.$$

Nun sind die Ausdrücke $\alpha_i - \alpha_k$ zu berechnen. Es war nach Gleichung (10)

$$\alpha_i = \frac{n_i}{2N} i^2 + \frac{N + n_i}{2 n_i} \vartheta \sin \varphi - \frac{\vartheta^2}{2} - i \vartheta \cos \eta.$$

Daher ist:

$$\alpha_i - \alpha_k = \frac{n_k - n_i}{2} \left\{ \frac{N}{n_i n_k} \vartheta \sin \varphi - \frac{i^2}{N} \right\}.$$

Man bekommt demnach:

$$\begin{aligned}(n_3 - |n_3|)(q_1 - q_2)^2 = \frac{n_1 - n_2}{2} \Big\{ & \frac{N}{n_1 n_2 n_3} \vartheta \sin \varphi \left[q_1 q_2 (n_1 - n_2) n_3 \right. \\ & \left. + q_2 q_3 (n_2 - n_3) n_1 + q_3 q_1 (n_3 - n_1) n_2 \right] \\ & - \frac{i^2}{N} \left[q_1 q_2 (n_1 - n_2) + q_2 q_3 (n_2 - n_3) \right. \\ & \left. + q_3 q_1 (n_3 - n_1) \right] \Big\}.\end{aligned}$$

Zur Vereinfachung dieser Formel setzt man nun zunächst im ersten Gliede der geschweiften Klammer für die einzeln als Factoren auftretenden Grössen n_3, n_1, n_2 aus den Gleichungen (13) die folgenden Werte ein (unter Beachtung, dass die α jetzt vernachlässigt werden dürfen):

$$\begin{aligned} n_3 &= N - L q_3, \\ n_1 &= N - L q_1, \\ n_2 &= N - L q_2. \end{aligned}$$

Dann vereinfacht sich der Ausdruck zu:

$$\begin{aligned}(15) \quad & (n_3 - |n_3|)(q_1 - q_2)^2 \\ & = \frac{n_1 - n_2}{2} \left(\frac{N^2}{n_1 n_2 n_3} \vartheta \sin \varphi - \frac{i^2}{N} \right) \{ q_1 q_2 (n_1 - n_2) \\ & \quad + q_2 q_3 (n_2 - n_3) + q_3 q_1 (n_3 - n_1) \}.\end{aligned}$$

Man führt jetzt für alle q die aus den Ausgangsgleichungen bei Vernachlässigung der α folgenden Werte ein. Zunächst ist

$$q_i q_k = \frac{(N - n_i)(N - n_k)}{L^2},$$

und die geschweifte Klammer von (15) bekommt damit den Wert:

$$\begin{aligned}\sum q_i q_k (n_i - n_k) &= \frac{\sum N^2 (n_i - n_k) - \sum N (n_i + n_k)(n_i - n_k) + \sum n_i n_k (n_i - n_k)}{L^2} \\ &= \frac{\sum n_i n_k (n_i - n_k)}{L^2},\end{aligned}$$

da die Summen $\sum(n_i - n_k)$ und $\sum(n_i + n_k)(n_i - n_k)$ an sich beide gleich Null sind. Ausserdem ist

$$(q_1 - q_2)^2 = \frac{(n_1 - n_2)^2}{L^2},$$

und man erhält daher schliesslich:

$$(14\,a)\quad \left\{ \begin{array}{l} n_3 - |n_3| \\ = \dfrac{n_1 n_2 (n_1 - n_2) + n_2 n_3 (n_2 - n_3) + n_3 n_1 (n_3 - n_1)}{2 (n_1 - n_2)} \left(\dfrac{N^2}{n_1 n_2 n_3} \vartheta \sin\varphi - \dfrac{i^2}{N} \right). \end{array} \right.$$

Diese Gleichung entscheidet die Frage, wie klein man die Winkel i und ϑ zu machen hat, um eine bestimmte Genauigkeit zu erreichen. Ich wähle die später auszuführende Messung der Brechungsexponenten von Kochsalzlösungen als Beispiel. Hier ist $n_1 = 1{,}333$; $n_2 = 1{,}378$; n_3 sei gleich 1,360; $\sin\varphi$ ist bei meinen Keilen ungefähr gleich 0,0874; $N = 1{,}519$. Es ergiebt sich daher (abgesehen vom Vorzeichen):

$$n_3 - |n_3| = 2{,}4 \,.\, 10^{-5} \,.\, \{0{,}81\,\vartheta - 6{,}6\,i^2\}.$$

Ist also ϑ z. B. gleich 10^{-2}, so bewirkt dies im Resultat einen einseitigen Fehler von $1{,}9 \,.\, 10^{-7}$; ist $i = 10^{-2}$, so ist der Fehler gleich $1{,}6 \,.\, 10^{-8}$.

Grösser ist der Einfluss unvollkommener Einstellung, wenn man zuerst durch zwei unabhängige Versuche N bestimmt und dann immer nur *eine* Eichflüssigkeit benutzt, wenn also jedesmal nur bei zwei Versuchen die Einstellung dieselbe bleibt.

Man bedient sich dann der folgenden Formeln, die sehr leicht abzuleiten sind:

$$(16)\qquad |N| = \frac{q_1 n_2 - q_2 n_1}{q_1 - q_2},$$

$$(16\,a)\quad N - |N| = \frac{(N - n_1)(N - n_2)}{2} \left\{ \frac{N}{n_1 n_2} \vartheta \sin\varphi - \frac{i^2}{N} \right\},$$

$$(17)\qquad |n_3| = \frac{q_3 n_1 - (q_3 - q_1) N}{q_1},$$

$$(17\,a)\quad n_3 - |n_3| = \frac{(N - n_3)(n_1 - n_3)}{2} \left\{ \frac{N}{n_1 n_3} \vartheta \sin\varphi - \frac{i^2}{N} \right\}.$$

Bestimmt man z. B. mit den oben gewählten Werten n_1 und n_2 den Brechungsexponenten des Keiles, so ergiebt $\vartheta = 10^{-2}$ einen Fehler in N von $9{,}5 \,.\, 10^{-6}$, $i = 10^{-2}$ dagegen einen Fehler von $8{,}6 \,.\, 10^{-7}$.

Misst man schliesslich $n_3 = 1{,}333$ (um einen ungünstigen Fall zu wählen) unter Benutzung von $n_1 = 1{,}378$, so bedeutet $\vartheta = 10^{-2}$ einen Fehler in n_3 von $3{,}0 \cdot 10^{-6}$, $i = 10^{-2}$ einen solchen von $2{,}8 \cdot 10^{-7}$.

Selbst wenn man also i und ϑ nur auf $^1/_{100}$ (etwa 35') verkleinert, bleiben die einseitigen Fehler im Resultat jedenfalls unter einer Einheit der fünften Decimale.

Das Einstellungsverfahren und die erreichbare Verkleinerung der Winkel kann erst nach der ausführlichen Beschreibung des Apparates besprochen werden.

Die Gleichungen (14), (16) und (17) sind die Formeln, nach denen die Versuche auszurechnen sind. Man beachte, dass man in ihnen die Quotienten q, deren zugehörige Brechungsexponenten grösser als N sind, mit dem negativen Vorzeichen zu versehen hat, und dass man auch alle Brechungsexponenten um denselben Betrag, z. B. um eins, verringern kann, ohne dass die Formeln unrichtig werden, was für die praktische Durchführung der Rechnungen von Bedeutung ist.

Bevor ich die Theorie verlasse, beschäftige ich mich noch kurz mit der Frage, von welchen Rücksichten man sich bei der Wahl der Eichflüssigkeiten und der Dimensionen des Apparates leiten lassen kann.

Ich setze voraus, es sei mit verschiedenen Flüssigkeiten je eine Beobachtung gemacht unter Benutzung der ganzen zur Verfügung stehenden Verschiebung e, zu der die Streifenzahl s_i gehören möge. Man misst die Grösse s_i / e oder q_i. Da s_i nach Gleichung (1) von n_i abhängt, also bei Versuchen mit verschiedenen Flüssigkeiten verschieden gross ist, so wird sich auch die Genauigkeit der Bestimmung von q_i mit dem Brechungsexponenten der benutzten Flüssigkeiten ändern. Andrerseits wird auch der Einfluss eines Fehlers in q_i auf das Resultat von der Grösse des zugehörigen Brechungsexponenten n_i abhängen.

Ich befasse mich zuerst mit dem letzteren Einfluss und setze voraus, dass N und n_3 für sich bestimmt werden.[1]) Die absoluten Fehler der Grössen q_i seien durch Δq_i, die

1) Im allgemeinen Falle (zwei Eichflüssigkeiten) werden die Verhältnisse weniger übersichtlich.

absoluten Fehler von N und n_3, die ja von den Fehlern der Quotienten q_i abhängen, mit $\Delta_i N$ und $\Delta_i n_3$ bezeichnet.

Durch Differenziren der Gleichungen (16) und (17) nach q und mit Hülfe der vereinfachten Gleichungen (13) erhält man

$$\Delta_1 N = \frac{\partial N}{\partial q_1} \cdot \Delta q_1 = \frac{(N - n_1)(N - n_2)}{n_1 - n_2} \cdot \frac{\Delta q_1}{q_1},$$

$$\Delta_2 N = \frac{\partial N}{\partial q_2} \cdot \Delta q_2 = -\frac{(N - n_1)(N - n_2)}{n_1 - n_2} \cdot \frac{\Delta q_2}{q_2},$$

$$\Delta_1 n_3 = \frac{\partial n_3}{\partial q_1} \cdot \Delta q_1 = (N - n_3) \cdot \frac{\Delta q_1}{q_1},$$

$$\Delta_2 n_3 = \frac{\partial n_3}{\partial q_2} \cdot \Delta q_2 = -(N - n_3) \cdot \frac{\Delta q_2}{q_2}.$$

Die beiden bei einer Messung auftretenden Quotienten q_i müssen also mit derselben relativen Genauigkeit bestimmt werden. Zugleich sieht man, dass die Fehler in den Resultaten allgemein um so kleiner werden, je näher man mit den Brechungsexponenten der benutzten Flüssigkeiten an den Brechungsexponenten des Keils herangeht. Bei der Messung von N dürfen ausserdem n_1 und n_2 nicht zu nahe bei einander liegen.

Nun hängt aber, wie schon bemerkt, auch Δq_i von n_i ab, und zwar wird Δq_i um so grösser, je näher man mit den Brechungsexponenten an N heranrückt, je kleiner also die Zahl der vorüberwandernden Streifen ist. Der günstige Einfluss des Herangehens an N wird daher im allgemeinen wieder aufgehoben. Er tritt nur dann hervor, wenn die Zahl der vorüberwandernden Streifen an sich schon so gross ist, dass in $\Delta q_i / q_i$ der relative Fehler in $s : \Delta s / s_i$[1]) gegenüber dem relativen Fehler in $e : \Delta e / e$ nicht mehr in Betracht kommt. Es ist nämlich im ungünstigsten Falle:

$$\frac{\Delta q_i}{q_i} = \frac{\Delta e}{e} + \frac{\Delta s}{s_i}.$$

Bezeichnet man nun mit s_0 eine Streifenzahl, für die

(18) $$\frac{\Delta s}{s_0} = \frac{\Delta e}{e}$$

1) Δs ist für alle Flüssigkeiten gleich gross, da man auf scharfe und ruhige Streifen bei allen Flüssigkeiten gleich gut einstellen kann.

ist, die also relativ so genau wie die Verschiebung gemessen werden kann, so wird

$$\frac{\Delta q_i}{q_i} = \frac{\Delta e}{e}\left(1 + \frac{s_0}{s_i}\right),$$

und $\Delta q_i/q_i$ ist kleiner als $2\,\Delta e/e$ für alle Streifenzahlen, die grösser als s_0 sind.

Die Streifenzahl s_0, die zu einem gewissen Brechungsexponenten n_0 gehört und durch (18) definirt ist, ist also eine für jeden Apparat charakteristische, freilich nicht scharfe Grenze, unter die herunterzugehen zwecklos ist.

Man kann von dieser Thatsache bei der Construction des Compensators die folgende Anwendung machen: Man richtet sich bei der Wahl der Verschiebungslänge e und der Feinheit ihrer Ablesung nach der verlangten Genauigkeit und bestimmt dann den Keilwinkel φ aus der Gleichung (18), der man zu diesem Zweck die Form:

(18a) $$(N - n_0) \cdot \sin\varphi = \frac{\Delta s}{\Delta e} \cdot \lambda$$

giebt. Für n_0 setzt man dabei *den* Brechungsexponent von den benutzten ein, der N am nächsten liegt.

Es ist jedoch daran festzuhalten, dass derartige Betrachtungen nur einen gewissen Anhalt geben können. Denn einerseits wird man den Apparat nur selten einem ganz bestimmten Zweck anpassen wollen, andrerseits können die in (18) vorkommenden Grössen Δs und Δe im voraus nur annähernd bestimmt werden, sie hängen z. B. von der Geschicklichkeit des Beobachters und von der Eigenart des Verschiebungsmechanismus ab, und man kann nur durch praktische Versuche ein Urteil über sie gewinnen.

II. Beschreibung des Apparats.

Der Compensator, mit dem ich einige Versuche ausgeführt habe, besteht im wesentlichen aus den Glasteilen G (Fig. 10), der Fassung F, der Parallelverschiebung V und dem Winkelstück W und wird auf einem Träger T an der Wand des Zimmers so hoch über dem Arbeitstisch befestigt, dass die Glasteile und die Platten des aufzustellenden Interferentialrefractors in der gleichen Höhe sind.

Die Glasteile wurden von Steinheil in München aus Crownglas hergestellt. Die beiden abgestumpften Keile, deren Keilwinkel etwa 5^0 beträgt, bilden, wenn sie übereinander geschoben sind, eine Platte, die nicht ganz 3 cm hoch, 1 cm breit und ebenso lang ist. Ungefähr dieselben Dimensionen hat die in den Weg des anderen Strahlenbündels zu bringende planparallele Platte.

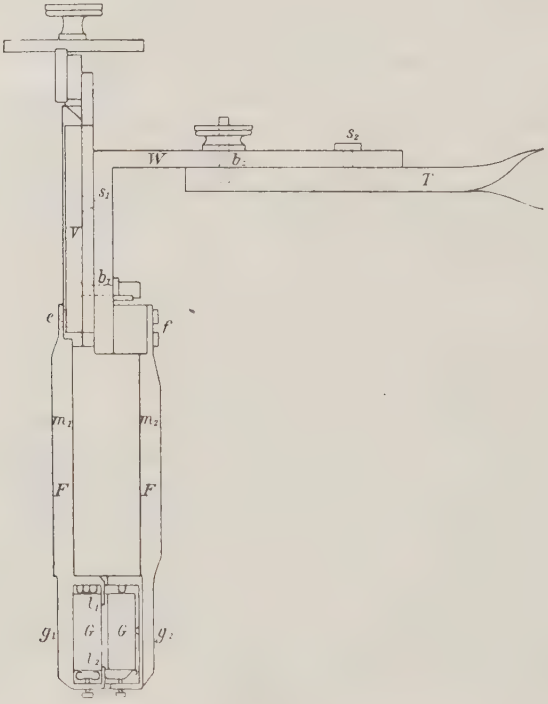

Fig. 10.

Der eine der beiden Keile, der feste, wurde in der Steinheil'schen Anstalt an der eben genannten Planplatte so festgekittet, dass seine äussere zu einer Verbindungslinie der Refractorplatten senkrechte Fläche möglichst genau mit der entsprechenden Fläche der Planplatte übereinstimmte (vgl. Fig. 20, S. 44). Zu diesem Zwecke wurden der Keil und die Planplatte beim Kitten auf eine ebene Glasfläche aufgelegt.

Es wurde ein Wasserglasasbestkitt verwendet, der sich wenigstens in kalten wässerigen Lösungen recht gut bewährte.[1])

Zum Verschieben des beweglichen Keils benutzte ich ein schon öfters gebrauchtes Objectschraubenmikrometer von Zeiss.[2])

Fig. 11 zeigt in Seitenansicht die Führung des Mikrometers. Auf ihr wird bei *m m* die Mutter *M* der Mikrometerschraube *S* (Fig. 12) befestigt. Diese gestattet bei einer Ganghöhe von 0,2 mm eine Gesamtverschiebung des Schlittens von 10 mm. Die ganzen Umdrehungen der Schraube werden an einem Zeigerwerk *z*, die Hundertstel an der Trommel *t* abgelesen.

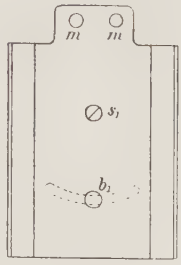

Fig. 11.

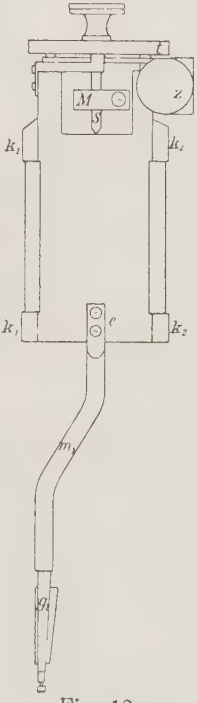

Fig. 12.

Die Schlittenführung ist auf dem einen Schenkel des aus Rotguss hergestellten Winkelstücks *W* (Fig. 10) durch eine Schraube s_1 und einen Schraubbolzen b_1 mit Mutter befestigt. Der Bolzen geht, wie es in Fig. 11 angedeutet ist, durch einen Schlitz des Winkelstücks; hierdurch sind Drehungen um die Schraube s_1 möglich, und man kann den Winkel zwischen den Seitenkanten der Parallelverschiebung und denen des Winkelstücks annähernd gleich dem Keilwinkel φ machen. Diese Stellung wurde durch eine Befestigungsschraube ein für allemal fixirt.

Der andere Schenkel des Winkelstücks, der horizontale, ruht auf dem Träger *T* (Fig. 10). Dieser ist ein 25 mm breites, 8 mm dickes Flacheisen, das rechtwinklig umgebogen ist und so einen längeren und einen kürzeren Schenkel bildet (vgl. den Grundriss Fig. 13). Der längere Schenkel ist an der Wand des

1) In Benzol beobachtete ich eine geringe Verschmutzung der Glasteile. — Man wird übrigens die jetzt zusammengekitteten Teile in Zukunft wohl besser aus *einem* Stück herstellen lassen.

2) Aeltere Construction.

Zimmers mit starken Schrauben auf eingegipsten Diebeln horizontal befestigt; der kürzere, der nun normal zu der Wand in das Zimmer hereinragt, ist umgekröpft, sodass er die eine von seinen breiten Flächen horizontal nach oben kehrt. Auf dieser horizontalen Fläche wird das Winkelstück W befestigt, und zwar ebenfalls durch eine Schraube s_2 und einen Schraubbolzen b_2 mit Mutter und Schlitz (Fig. 10), sodass auch hier noch kleine Drehungen um die Axe der Schraube s_2 möglich sind.

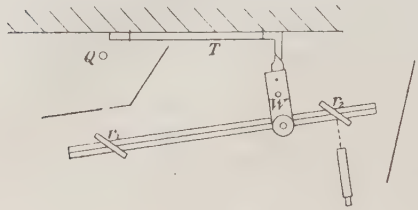

Fig. 13.

Die Glasteile sind mit der Parallelverschiebung durch die Fassung F verbunden. Auf dem Schlitten bei e und auf dem unteren Ende des Winkelstücks bei f sind durch je zwei Schrauben zwei cylindrische Messingstangen m_1 und m_2 von 7 mm Durchmesser befestigt, die an ihrem unteren Ende die für die Glasteile bestimmten Gehäuse g_1 und g_2 tragen. Die feste Stange m_2 ist entsprechend den Dimensionen der festen Glasteile durch einen Messingklotz um ein beträchtliches Stück von dem Winkelstück W abgehoben. Die bewegliche Stange ist zweimal umgebogen, sodass ihre Axe zuletzt wieder parallel zu der einen seitlichen Kante des Schlittens k_1 und nur in geringem Abstande von deren Verlängerung läuft (vgl. Fig. 12). Die Gehäuse g_1 und g_2 sind aus Messing und umschliessen die Glasteile so, dass nur die Flächen freibleiben, durch die die Strahlen hindurchgehen müssen. Kleine mit Schrauben angedrückte Federn aus Messingblech halten die Glasteile fest. Diese liegen nicht unmittelbar auf den Wänden der Gehäuse auf, sondern aus diesen ragen niedrige, durch kleine Messingschräubchen gebildete warzenartige Erhöhungen hervor in solcher Anzahl und Gruppirung, dass die Orientirung der gegen sie gedrückten Glasteile eindeutig bestimmt ist. Im allgemeinen wird dies durch fünf „Warzen“ erreicht. In dem beweglichen Gehäuse des von mir benutzten Apparates sind nur drei Warzen (an der oberen Wand); hätte ich noch zwei Warzen auf den Lappen l_1 und l_2 angebracht, so wäre der Zwischenraum zwischen dem beweglichen Keil und der Plan-

platte zu gross geworden. Die Anordnung der Warzen ist aus den Figuren 10 und 14 (Grundriss der Gehäuse) zu ersehen.

Zur Erzeugung der Interferenzstreifen diente ein aus den Bestandteilen eines Zehnder'schen Apparates[1]) zusammengestellter Jamin'scher Interferentialrefractor. Er stand während der Versuche frei beweglich auf einer in die Wand des Zimmers eingelassenen Marmorplatte, die als Arbeitstisch diente.

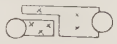

Fig. 14.

Der Trog, der die Versuchsflüssigkeiten aufnahm, ist in den Figuren 15, 16 und 17 dargestellt. Er hat zwei Spiegelglas-

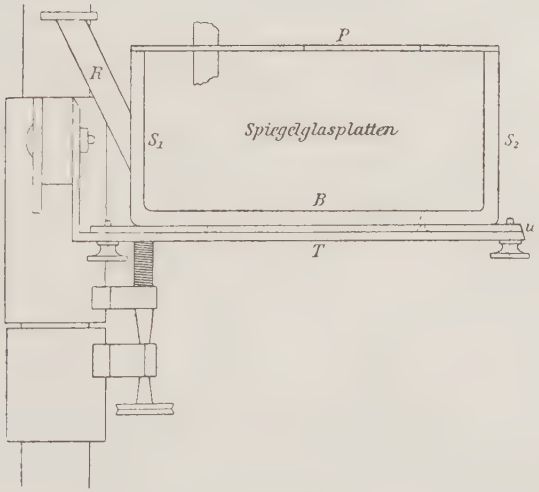

Fig. 15.

wände, die er beim Gebrauch den beiden Refractorplatten zukehrt (vgl. Fig. 15); die beiden anderen Seitenwände S_1 und S_2 und der Boden B werden durch ein U-förmig gebogenes starkes Messingblech gebildet, damit sich etwaige Temperaturunterschiede rascher ausgleichen. Auf diesem Blech sind die Spiegelglasplatten mit Wachskolophoniumkitt, der für wässerige Lösungen genügte, aufgekittet; die Kittflächen wurden vorher möglichst eben und einander parallel abgedreht. Der Boden des Troges ist durch kurze Schrauben mit einer Unterlegeplatte u verbunden; durch diese wird die Befestigung des Troges wesentlich erleichtert.

1) L. Zehnder, Zeitschr. f. Instrumentenk. **11.** p. 275. 1891.

In dem einen seitlichen Schenkel S_1 des Messingblechs ist zum bequemen Einfüllen der Flüssigkeiten eine Röhre R hart eingelötet; sie ist so weit, dass man durch sie eine Pipette bis auf den Boden des Troges einführen kann; ihre obere Oeffnung bildet eine horizontale, eben abgedrehte Ringfläche.

Um die freie Oberfläche zu verkleinern, überdeckt man den Trog oben zunächst mit einer Verschlussplatte P aus Messing. Diese ragt ein beträchtliches Stück über die beiden Spiegelglasplatten hervor (vgl. Fig. 16), sie hat zwei Ausschnitte, einen runden für das Thermometer, und einen rechteckigen für den Compensator, und wird durch zwei kleine Schrauben auf S_1 und S_2 festgehalten. Die Fugen zwischen dieser Verschlussplatte und dem eigentlichen Troge sind mit Kitt ausgegossen

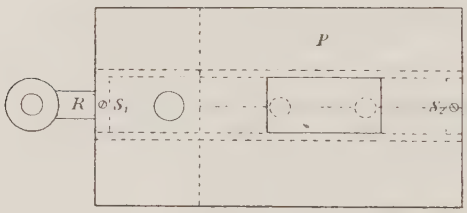

Fig. 16.

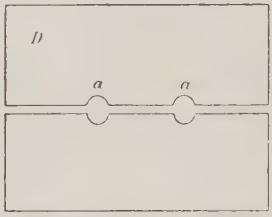

Fig. 17.

Der rechteckige Ausschnitt in der Verschlussplatte ist so gross, dass der Compensator — durch Emporschrauben des Troges — mit geringem Spielraum eingeführt werden kann. Zum Heben und Senken des Troges bediente ich mich eines alten Fernrohrstativs (Fig. 15), auf dem eine Hülse durch eine Schraube vertical auf und ab bewegt werden kann. An der Hülse ist ein kleines Tischchen T angebracht und auf diesem die Unterlegeplatte des Troges festgeschraubt.

Zu dem Trog gehört ausserdem noch der zweiteilige Deckel D (Fig. 17; in Fig. 16 punktirt), der das Verdunsten der Flüssigkeiten möglichst beschränken soll. Er wird auf die Verschlussplatte aufgelegt, wenn der Trog durch die Schraube des Stativs so weit emporgehoben ist, dass sich der Compensator ganz in der Flüssigkeit befindet. Wenn nun noch die obere Oeffnung der Einfüllröhre mit einer Glasplatte bedeckt wird, so ist der Trog bis auf wenige ganz schmale Fugen völlig abgeschlossen, da die kreisförmigen Ausschnitte $a\,a$ den Messing-

stangen der Fassung genau angepasst sind. Die sehr geringe Verdunstung, die immer noch stattfindet, kommt um so weniger in Betracht, als der Trog eine recht bedeutende Flüssigkeitsmenge fasst.

Sämtliche Messingteile sind schwarz gebrannt.

Dass die Parallelverschiebung V und das Winkelstück W sofort nach der Herstellung fest miteinander zu verbinden sind, wurde schon bemerkt. Dasselbe gilt von der Parallelverschiebung und der Fassung. Dagegen bedarf nach den Ergebnissen des ersten Abschnitts die Einlagerung der Glasteile in die Gehäuse besonderer Vorbereitungen, die im folgenden Abschnitt, der überhaupt von dem Einstellungsverfahren handelt, besprochen werden sollen.

III. Das Einstellungsverfahren.

Zur Einstellung des Compensators muss das Beobachtungsfernrohr des Interferentialrefractors mit einem Gauss'schen Ocular versehen werden. Die Einstellungen auf Kleinheit des Winkels ϑ und auf Planparallelismus des Doppelkeils, die auf eine bestimmte Lagerung der Glasteile in den Gehäusen hinauslaufen, werden ein für allemal (schon vom Mechaniker) ausgeführt; der Winkel i dagegen muss jedesmal vor der Benutzung des Apparats verkleinert werden, weil diese Einstellung ja eine Fixirung des Interferentialrefractors relativ zum Compensator ist.

Zur Verkleinerung des Winkels ϑ löst man die Befestigungsschrauben der Schraubenmutter M und zieht den Schlitten nach oben aus der Führung heraus (vgl. Fig. 12). Das Gehäuse des beweglichen Keils ist so weit von dem Schlitten entfernt, dass es der Herausnahme des Schlittens kein Hindernis in den Weg setzt. Dann wird der Schlitten mit der Kante k_1 auf eine möglichst ebene Fläche[1]) aufgesetzt. Infolge der doppelten Biegung der zugehörigen

1) Als solche benutzte ich in Ermangelung einer hinreichend grossen anderen die Wange einer Drehbank. Dass diese eben genug war, ging aus zwei Thatsachen hervor: erstens war es für die sofort zu beschreibende Einstellung gleichgültig, an welcher Stelle der Schlitten aufgesetzt wurde, was auf constante Krümmung schliessen lässt, und zweitens zeigte ein der Technik des Planplattenschleifens nachgebildeter Versuch, dass auch eine kreisförmige Krümmung der Wange ausgeschlossen war.

Messingstange schwebt jetzt der bewegliche Keil so weit über der ebenen Fläche, dass man noch eine planparallele Platte unterlegen kann. Nun bringt man das Fernrohr mit dem beleuchteten Fadenkreuz über den Keil und sucht die beiden Fadenkreuzbilder, die von den Reflexionen an der unteren (schiefen) Keilfläche und an den beiden Flächen der untergelegten planparallelen Platte herrühren, durch Veränderung der Lage des Keils in seinem Gehäuse zur Deckung zu bringen. Man feilt zu diesem Zwecke an den Warzen des Gehäuses so lange ab, bis die schiefe Fläche des Keils der untergelegten Planplatte und damit der ebenen Fläche parallel ist.[1])

Nun kann man die conisch zulaufende und sehr scharfe Kante k_1 des Schlittens bei der geringen Genauigkeit, die für die Einstellungen verlangt wird, als mit der Verschiebungsrichtung zusammenfallend ansehen; man erreicht also durch das Verfahren, dass die schiefe Keilfläche eine der Verschiebungsrichtung parallele Gerade enthält, d. h. dass ϑ verschwindend klein ist.

Ueber die Genauigkeit, die dabei zu erreichen ist, giebt Fig. 18 einen Anhalt. M sei der Fadenkreuzmittelpunkt, L die auf unendlich eingestellte Objectivlinse, F die reflectirende Fläche, die aus der zur Fernrohraxe senkrechten Stellung um den Winkel w gedreht sein soll. Man greift dann aus den Strahlen, die von M ausgehen und sich im Bilde von M, nämlich in D, wieder vereinigen, den Strahl $M\,A\,B\,C\,D$ heraus, der durch den optischen Mittelpunkt C geht. Die Figur ergiebt dann ohne weiteres, wenn $M\,D$ mit a und die Brennweite $M\,C$ mit f bezeichnet wird:

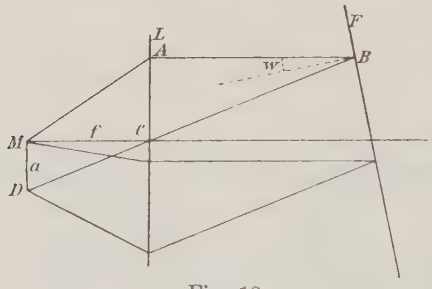

Fig. 18.

$$\operatorname{tg} 2\,w = -\frac{a}{f}\,.$$

1) Selbstverständlich kann dies immer nur für eine einzige, übrigens ganz beliebige Stellung des um k_1 als Axe drehbaren Schlittens erreicht werden.

Durch Abschätzen von a und annähernde Bestimmung von f habe ich gefunden, dass man w leicht bis auf $^1/_{20}{}^0$ verkleinern kann, während nach S. 31 nur eine Verkleinerung auf etwa $^1/_2{}^0$ nötig ist.

Zur Einstellung auf Planparallelismus des Doppelkeils wird der Schlitten wieder in seine Führung eingeschoben. Dann bringt man das Fernrohr mit dem beleuchteten Fadenkreuz wieder über den Doppelkeil und sucht, wie es Fig. 19 zeigt, erstens die von den beiden schiefen Flächen und zweitens die von den beiden äusseren Flächen reflectirten Fadenkreuzbilder zur Deckung zu bringen. Man feilt nun natürlich nur noch an den Warzen des festen Gehäuses, um die ϑ-Einstellung nicht zu verderben. Dass man durch dieses Verfahren den Doppelkeil sozusagen zu einer planparallelen Platte machen kann, und dass dazu nicht etwa schon die eine der beiden Reflexionsbeobachtungen genügt, das bedarf wohl keines näheren Beweises.

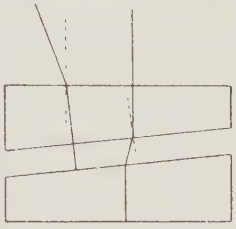

Fig. 19.

Uebrigens braucht man im allgemeinen nicht mit homogenem Licht einzustellen, da etwaige farbige Ränder auf die Genauigkeit kaum von Einfluss sein können.

Die Methode des Abfeilens ist in den Grenzen der verlangten Genauigkeit durchaus zuverlässig. Die Glasteile meines Apparates, die schon sehr bald nach Beginn der vorliegenden Arbeit bestellt wurden, haben leider, wie aus ihren im vorigen Abschnitt mitgeteilten Dimensionen hervorgeht, nur sehr kleine Aufliegeflächen, sodass ich z. B. bei dem beweglichen Keil ein besonderes keilförmiges kleines Blech unter die Feder legen musste, um nur zu erreichen, dass der Keil wirklich auf seinen Warzen aufsass. That er dies aber einmal, so folgten die Glasteile sehr zuverlässig den Abfeilungen der Warzen. Bei grossen Aufliegeflächen, die ja in jeder Beziehung nur vorteilhaft sein können, werden diese Einstellungen ohne Zweifel nicht nur sicher, sondern auch bequem sein.

Auf senkrechten Einfall muss, wie schon bemerkt, beim einzelnen Versuch eingestellt werden. Um Wiederholungen zu vermeiden, bespreche ich jetzt auch schon die anderen Manipulationen, die den Versuchen voranzugehen haben.

Zuerst wird das Winkelstück auf dem Träger befestigt. Durch dazwischen gelegte Blechstreifen sucht man dabei eine ungefähr verticale Stellung der äusseren unbedeckten Glasteilflächen zu erreichen. Die Drehbarkeit des Winkelstücks um s_2 (Fig. 10) kann man dazu benutzen, für die Aufstellung der Lichtquelle Q und von Schutzschirmen zwischen dem Refractor und der Wand Platz zu gewinnen (vgl. Fig. 13).

Man sucht nun zunächst mit zwischengeschaltetem Compensator deutliche Streifen zu erhalten, die sich bei der Bewegung des Keiles verschieben, und richtet das Fernrohr darauf. In der dadurch gegebenen Lage wird die Fernrohrhülse so fest wie möglich angeschraubt; das Fernrohr darf von nun an nur noch in der Richtung seiner Axe verschoben werden.

Nun stellt man auf senkrechten Einfall ein. Man setzt zu diesem Zwecke auf die Schiene des Refractors irgend eine Vorrichtung[1]) auf, die ungefähr in der Höhe der Refractorplatten einen scharf markirten Punkt, etwa den Schnittpunkt eines Kreuzes, trägt. Man verschiebt diesen Hülfspunkt, bis er sich im Fernrohr mit dem Schnittpunkt des Fadenkreuzes deckt, zieht das Fernrohr aus seiner Hülse und lässt nun durch Verschieben des ganzen Refractors auf dem Arbeitstisch und durch Verstellen der Fussschrauben des Refractors das glänzende Bild des stark beleuchteten Auges mit dem Hülfspunkt, den man immer im Mittelpunkt der Hülse sehen muss, zusammenfallen. Steckt man nun das Fernrohr mit dem Gauss'schen Ocular wieder in seine Hülse, so hat man meistens das zweimal an der Refractorplatte r_2 (Fig. 13) und einmal an den Glasteilen des Compensators reflectirte Bild des Fadenkreuzes schon im Gesichtsfelde, und die feinere Einstellung ist leicht. Bei der Verschiebung des ganzen Refractors muss natürlich der Compensator in der Bahn der interferirenden Strahlenbündel bleiben, was einige Aufmerksamkeit erfordert.

Darauf wird der Trog in die Anordnung eingefügt. Er wird sorgfältig gereinigt, auf dem Tischchen des Stativs be-

1) Z. B. ein Stück Holz, unten mit einer geeigneten Aussparung für die Schiene, oben mit einem Einschnitt zum Einklemmen eines Stückes Papier.

festigt, unter den Compensator gebracht und vorsichtig emporgeschraubt. Man stellt nun die vordere Spiegelglasplatte des Trogs, ähnlich wie vorhin die Glasteile des Compensators, senkrecht zu den in Betracht kommenden Strahlen. Denn unterliesse man dies, so könnte man auch die senkrechte Incidenz an den Glasteilen nicht mehr verbürgen. Das Auffinden des Bildes wird hier übrigens meist ohne besondere Hülfsmittel gelingen.

Danach wird vorsichtig von der Seite her der Deckel aufgeschoben und die zu untersuchende Flüssigkeit, nötigenfalls nachdem man vorgespült hat, in den Trog gebracht. Die Einfüllröhre wird mit einer kleinen Glasplatte bedeckt.

Arbeitet man wie gewöhnlich mit nicht ganz homogenem Licht, so sind die Streifen nicht überall gleich scharf; an Stellen, die um gleiche Streifenzahlen voneinander entfernt sind, verschwinden sie ganz. Man wird daher vor den Versuchen durch Verstellen der Refractorplatte r_1 (Fig. 13) dafür sorgen, dass man, wenn das überhaupt möglich ist, die ganze Verschiebungslänge und zwar mit möglichst schönen Streifen benutzen kann.

Während der Versuche lässt man nach den Ergebnissen der Theorie am besten alle Einstellungen unverändert.

IV. Einfluss der Temperatur und Anordnung der Beobachtungen.

Bisher wurde stillschweigend vorausgesetzt, dass die Temperatur sowohl bei jeder einzelnen Verschiebung, als auch bei jeder zusammengehörigen Gruppe von Eich- und Hauptversuchen immer dieselbe sei. In Wirklichkeit sind diese beiden Voraussetzungen nur schwer zu erfüllen, und es fragt sich, ob sie überhaupt wesentlich sind.

Zunächst ist ohne weiteres klar, dass die Eich- und Hauptversuche bei verschiedenen Temperaturen angestellt werden dürfen, wenn nur in dem betreffenden Temperaturintervall N und die Ganghöhe der Schraube als constant angesehen werden können. Selbstverständlich müssen in den Formeln (14), (16) und (17) immer die den betreffenden Versuchstemperaturen entsprechenden Eichexponenten eingesetzt werden, und man

erhält dann ohne weitere Umrechnungen den Brechungsexponenten der zu untersuchenden Flüssigkeit für die Temperatur des Hauptversuchs.

Eingehender muss die Frage behandelt werden, welchen Einfluss Inconstanz der Temperatur während der einzelnen Verschiebung hat.

Ich verallgemeinere zuerst die Gleichung (1) für den Fall, dass der Brechungsexponent des äusseren Mediums infolge von Temperaturänderungen beim Einstellen des ersten Streifens (Trommelablesung u_1) den Wert n_1, beim Einstellen des letzten Streifens (Trommelablesung u_ν) den Wert n_ν hat. n_1 und n_ν sollen so wenig voneinander verschieden sein, dass der Brechungsexponent durchweg als rein lineare Function der Temperatur angenommen werden darf. Die Aenderung von N mit der Temperatur sei überhaupt zu vernachlässigen.

In Fig. 20 sind die Glasteile des Compensators im Grundriss dargestellt. Der den Doppelkeil durchsetzende Strahl ist durch die Ziffer 1, der die planparallele Platte durchsetzende durch die Ziffer 2 gekennzeichnet. Das schraffirte Feld entspricht der (stark übertriebenen) Gesamtdickenänderung des Doppelkeils d und der Schraubenverschiebung $u_\nu - u_1$. Ich verstehe nun unter der „symmetrischen Stellung“ des beweglichen Keils die Stellung, bei der der Doppelkeil und die planparallele Platte, die beide aus demselben Material bestehen, gleich dick sind, unter der „Mittelstellung“ des beweglichen Keils dagegen die Stellung, zu der die Trommelablesung $(u_1 + u_\nu)/2$ gehört. Die Differenz der Dicken, die der Doppelkeil in diesen beiden Stellungen hat, soll mit δ bezeichnet werden. δ sei positiv, wenn in der Mittelstellung der Doppelkeil dicker ist als die planparallele Platte (wie in Fig. 20).

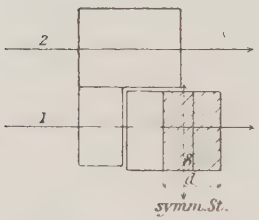

Fig. 20.

Wird nun zunächst der Doppelkeil bei der Verschiebung dicker — eine solche Verschiebung werde eine „positive“ genannt —, so ist der Gangunterschied, den die Strahlen 1 und 2 durch den Compensator gegeneinander erhalten, *vor* der Verschiebung $(n_1 - N)(d/2 - \delta)$, *nach* der Verschiebung

$(N - n_\nu)(d/2 + \delta)$, und die der Verschiebung entsprechende Streifenzahl ist durch

$$\lambda s = \left\{ N - \frac{n_1 + n_\nu}{2} \right\} d + \delta(n_1 - n_\nu) \tag{19a}$$

gegeben. Verschiebt man dagegen bei derselben Temperaturänderung im entgegengesetzten Sinne (so, dass der Doppelkeil dünner wird, „negative Verschiebung"), so ist die zu dieser Verschiebung gehörende Streifenzahl s' als positive Zahl gleich dem folgenden Ausdruck:

$$\lambda s' = \left\{ N - \frac{n_1 + n_\nu}{2} \right\} d - \delta(n_1 - n_\nu). \tag{19b}$$

Eine Verschiebung zwischen den Temperaturen t_1 und t_ν ist daher einer Verschiebung bei der constanten Temperatur $(t_1 + t_\nu)/2$ gleichwertig, vorausgesetzt, dass $\delta = 0$, d. h. der Compensator symmetrisch gebaut ist.[1])

Ist δ stark von Null verschieden, so stehen zwei Wege offen:

1. Man verschiebt den Keil in beiden Richtungen und nimmt dann das Mittel aus den beobachteten Streifenzahlen. Man ist dabei nicht gebunden, bei beiden Versuchen dasselbe Temperaturintervall einzuhalten; beobachtet man z. B. zuerst in der einen Richtung zwischen den Temperaturen t_1 und t_2. dann in der anderen Richtung zwischen den Temperaturen t_3 und t_4, und setzt man $k = (t_1 - t_2)/(t_3 - t_4)$, so ist $(s + k\,s')/(1 + k)$ die der Temperatur $(t_2 + k\,t_3)/(1 + k)$ entsprechende Streifenzahl.

2. Besser ist es, eine „Asymmetriecorrection" anzubringen. Man bestimmt zu diesem Zwecke zunächst die Asymmetrie δ durch einen Hülfsversuch. Man entfernt den Compensator aus dem Wege der Lichtstrahlen und stellt mit weissem Licht den Refractor so ein, dass der achromatische Streifen im Fernrohr mit dem Fadenkreuz zusammenfällt. Dann bringt man den Compensator zwischen die Refractorplatten und verschiebt den beweglichen Keil, bis der Schnittpunkt der Fäden wieder auf dem achromatischen Streifen liegt. Dann wirkt der Compensator wie eine planparallele Platte, ist also in der sym-

1) Man hätte dieses Resultat natürlich auch ohne Rechnung durch einfache Ueberlegung finden können.

metrischen Stellung. Mit Hülfe des Schraubenwertes und der Grössen L und $(u_1 + u_\nu)/2$ erhält man hieraus δ mit einer für die Correction hinreichenden Genauigkeit in Millimetern.[1])

Nach (19a) ist nun also bei positiver Verschiebung $\delta . (n_1 - n_\nu)/\lambda$ von s abzuziehen. Aus praktischen Gründen aber, die später hervortreten werden, bringt man die Correction nicht an der Streifenzahl s, sondern an der Verschiebung $e = d/\sin\varphi$ an. Die corrigirte Verschiebung e soll ja der einfacheren Gleichung genügen:

$$s = \frac{e}{L}\left\{N - \frac{n_1 + n_\nu}{2}\right\},$$

und hieraus und aus (19a) folgt:

$$|e| = e\left\{1 + \frac{\delta(n_1 - n_\nu)}{\lambda s}\right\}. \tag{20}$$

Die Correction ist demnach zu addiren, wenn δ und die Verschiebung positiv sind und der Brechungsexponent der Flüssigkeit während des Versuchs abnimmt. Sie ist übrigens in den meisten Fällen verschwindend klein.

Noch um vieles geringer ist der directe Einfluss von Temperaturschwankungen auf andere Teile des Strahlenganges. So hängt z. B. nach (2) der durch den Refractor selbst bewirkte Gangunterschied von den Brechungsexponenten der Refractorplatten und damit von der Temperatur ab. Ferner lenkt ein schwach prismatischer Trog bei verschiedenen Temperaturen verschieden stark ab. Beide Einflüsse können aber, wie man sich leicht überzeugt, auch bei den höchsten Anforderungen an die Genauigkeit der Messungen vernachlässigt werden. Ebenso steht es mit einer Längenänderung der Mikrometerschraube.

Viel wichtiger sind die völlig uncontrolirbaren Fehler, die von Erwärmung einzelner Apparatteile und von Strömungen in der Trogflüssigkeit herrühren. Man hilft sich durch Schirme und durch Abschliessen des Troges. *Vollständig* ruhig stehende Streifen wird man wohl nie erreichen; da die durch das Wackeln der Streifen veranlassten Fehler aber zufällige sind,

1) Auf ähnliche Weise bestimmte Billet (vgl. die Einleitung) den Nullpunkt seiner Compensatorscala.

können sie durch geeignete Anordnung und Häufung der Versuche unschädlich gemacht werden.

Ueber diese Anordnung der Versuche muss nun noch einiges gesagt werden. Es wäre sehr unpraktisch, nur durch *zwei* Einstellungen u_1 und u_ν eine gewisse Verschiebung e und durch Abzählen die dazugehörige Streifenzahl s zu bestimmen. Denn s kann ungefähr gleich 300 sein, und Irrtümer wären unvermeidlich. Man misst daher besser nur einmal im Anfang durch directes Abzählen die zu einer bestimmten kleinen Streifenzahl σ gehörende Verschiebung e_σ und benutzt dann die Ablesevorrichtungen der Schraube selbst zum Streifenzählen, indem man immer annähernd um e_σ weiterschraubt und dann auf den nächsten (hellen) Streifen eindreht. σ ist natürlich so zu wählen, dass niemals ein Zweifel bestehen kann, auf welchen Streifen einzustellen ist. σ kann um so grösser genommen werden, je genauer man $q = \sigma/e_\sigma$ bereits kennt. Hat man auf diese Weise ν Einstellungen gemacht, so sind von der ersten bis zur ν^{ten} Einstellung $s = (\nu - 1)\sigma$ Streifen vorbeigewandert.

Bei genauen Messungen notirt man alle Einstellungen und benutzt sie beim Resultat mit. Man bekommt dann für $1/q$ ausser dem schon angegebenen Werte

$$\frac{1}{q} = \frac{u_\nu - u_1}{s} = \frac{u_\nu - u_1}{(\nu - 1)\sigma}$$

noch eine Reihe von anderen Werten:

$$\frac{u_{\nu-1} - u_2}{(\nu - 3)\sigma}, \quad \frac{u_{\nu-2} - u_3}{(\nu - 5)\sigma}, \quad \ldots,$$

die auch bei inconstanter Temperatur alle für annähernd dieselbe Temperatur gelten. Bildet man aus diesen Werten $1/q$ auf geeignete Weise das Mittel, so ist dieses die zu einem Streifen gehörende Verschiebung bei der Mitteltemperatur aus allen zu den Werten $1/q$ abgelesenen Temperaturen.

Legt man den Werten $1/q$ der Reihe nach die Gewichte

$$(\nu - 1)^2, \quad (\nu - 3)^2, \quad (\nu - 5)^2, \ \ldots$$

bei, wozu man berechtigt ist, da die relativen Fehler proportional $1/(\nu - 1)$, $1/(\nu - 3)$, $1/(\nu - 5)$, ... sind, so erhält man für das arithmetische Mittel:

$$\frac{\sigma}{q} = e_\sigma = \frac{(\nu - 1)(u_\nu - u_1) + (\nu - 3)(u_{\nu-1} - u_2) + (\nu - 5)(u_{\nu-2} - u_3) + \ldots}{(\nu - 1)^2 + (\nu - 3)^2 + (\nu - 5)^2 + \ldots},$$

und diese Formel ist identisch mit der bekannten:

$$(21)\quad e_\sigma = 6\,\frac{(\nu-1)(u_\nu-u_1)+(\nu-3)(u_{\nu-1}-u_2)+(\nu-5)(u_{\nu-2}-u_3)+\dots}{\nu(\nu^2-1)},$$

die ich deshalb nicht einfach übernommen habe, weil nicht ohne weiteres klar ist, dass sie auch bei inconstanter Temperatur, also ungleichen Abständen $u_\nu - u_1$ gilt.

Die Asymmetriecorrection wird auch jetzt noch durch Gleichung (20) gegeben, in der nur die Grössen $|e|$ und e durch die anderen $|e_\sigma|$ und e_σ zu ersetzen sind. Denn man darf annehmen, dass der Quotient $(n_1 - n_\nu)/s$ für alle in (21) vorkommenden Einstellungsdifferenzen denselben Wert hat, dass sich die Temperatur also von einer Einstellung zur anderen immer um gleiche Beträge ändert.

(21) und (20) sind also die Formeln für die Berechnung; sie liefern e_σ für die Mitteltemperatur aus allen Einstellungstemperaturen.

V. Messungen.

Ich habe zur Prüfung des Compensators auf seine Genauigkeit Versuche mit destillirtem Wasser und zwei Kochsalzlösungen von verschiedener Concentration angestellt. Die eine etwa 25procentige Lösung, deren Brechungsexponenten ich einer Arbeit von Schütt[1]) entnahm, diente mir nach Gleichung (16) zur Bestimmung des Brechungsexponenten der Keile; den Brechungsexponenten der anderen, etwa 15procentigen, suchte ich nach Gleichung (17) zu messen. Der Proportionalitätsfactor L wurde in beiden Fällen durch Beobachtungen mit Wasser eliminirt.

Den eigentlichen Messungen gingen langwierige Untersuchungen der Schraube voraus. Insbesondere wurden ihre periodischen Fehler in elf verschiedenen Schraubengängen jedesmal für die Trommelteile 0, 5, 10, ... nach einer von Rydberg[2]) angegebenen Methode bestimmt. Als Vergleichsobject wählte ich hierbei die Verschiebung der Streifen in Luft, die so rasch erfolgt, dass ein Fehler im Einstellen gegen die Fehler der Schraube gar nicht in Betracht kommt. Ob-

1) F. Schütt, Zeitschr. f. phys. Chem. **5**. p. 349. 1890.
2) J. R. Rydberg, Zeitschr. f. Instrumentenk. **16**. p. 227. 1896.

gleich nun die Mittel aus immer zwei derartigen Messungen auf einen sehr regelmässigen und constanten Verlauf der periodischen Fehler schliessen liessen, so habe ich dennoch später von ihrer Benutzung aus zwei Gründen abgesehen: erstens regulirt die durchweg benutzte Formel (21) die von den periodischen Fehlern herrührenden Abweichungen schon von selbst, sodass sich das Resultat in mehreren von mir ausgerechneten Fällen durch die Schraubencorrectionen höchstens um $^1/_{40}$ pro mille änderte; und zweitens zeigte es sich, dass die Schraubencorrectionen trotz der anfänglichen guten Uebereinstimmung und trotz sorgfältiger Pointirung die Einstellungen oft nicht verbesserten, sondern eher verschlechterten. Das letztere muss wohl darauf geschoben werden, dass die gemessenen periodischen Fehler in der Hauptsache keine Fehler des Schraubengewindes sind, sondern durch sonstige uncontrolirbare Unregelmässigkeiten verursacht werden. So z. B. beschrieb die Schraubenaxe, weil die Schraube nur durch *eine* Mutter befestigt ist, während jeder Umdrehung eine Art Kegelfläche, und die Grösse der hierdurch hervorgerufenen Abweichungen musste wieder von dem Druck abhängen, den man beim Drehen ausübte und dergleichen mehr.

Von der Anbringung anderer Schraubencorrectionen war noch weniger Erfolg zu erwarten.[1])

Zu den Kochsalzlösungen wurde „Chlornatrium reinst geschmolzen“ aus der chemischen Fabrik von E. Merck in Darmstadt verwendet. Unter dem Gehalt p verstehe ich die Menge Salz, die in 100 Gewichtsteilen der Lösung enthalten ist. p war

für die	„15 proc.“	Lösung 15,0155
„ „	„25 proc.“	„ 25,0042

Die Wägungen wurden natürlich auf den luftleeren Raum reducirt; die dritte Decimale ist sicher richtig. Auch die Fehler des Gewichtssatzes wurden bestimmt; ihr Einfluss war aber so gering, dass man sie auch ebensogut hätte unberücksichtigt lassen können.

Der Keil wurde immer zuerst dreimal in der betreffenden Lösung und dann ebenso oft in destillirtem Wasser verschoben.

1) Einige sehr grobe Mängel wurden durch eine Reparatur in der Zeiss'schen Anstalt beseitigt.

Im folgenden ist eine solche Gruppe von sechs „Verschiebungen“ als ein „Versuch“ bezeichnet. Zu Beginn jedes Versuches wurde der mit destillirtem Wasser gereinigte Trog mit reinem Filtrirpapier möglichst trocken getupft, auf dem Stativ befestigt und emporgeschraubt, sodass er die Gehäuse des Compensators umschloss. Nach der Einstellung auf senkrechten Einfall wurde er zunächst ein- bis zweimal bis zu seinem oberen Rande mit der zu untersuchenden Lösung[1]) vorgespült und dann bei aufgelegtem Deckel definitiv, und zwar nun nicht ganz bis zum oberen Rande, gefüllt. Die Lösungen wurden mit einer getrockneten Pipette nach tüchtigem Schütteln unmittelbar den Flaschen entnommen, in denen sie angesetzt waren. Während nun die Flüssigkeit die Temperatur ihrer neuen Umgebung annahm, stellte ich auf scharfe Streifen ohne Parallaxe gegen das Fadenkreuz ein. Nach 10—15 Minuten konnte ich gewöhnlich mit den Verschiebungen beginnen, ohne allzu starke Inconstanz der Temperatur befürchten zu müssen. Der Ersatz der Lösung durch Wasser nach den ersten drei Verschiebungen geschah durch die Einfüllröhre; es wurde dabei mindestens fünfmal vorgespült und darauf geachtet, dass sich dadurch an den verschiedenen Einstellungen nichts änderte.

Die Temperatur wurde mit einer Lupe an einem in $^1/_5{}^0$ geteilten Thermometer abgelesen, das mit einem durchbohrten Gummistöpsel in der Verschlussplatte befestigt war. Eine Vergleichung mit einem von der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt geeichten Normalthermometer ergab für alle in Betracht kommenden Temperaturen eine Correction von $+ 0{,}13^0$. Zum Constanthalten der Temperatur im Trog und zum Schutze des Interferentialrefractors, der, wie schon S. 46 bemerkt, in sehr unangenehmer Weise auf Bestrahlungen reagirt, wurden sowohl vor die Lichtquelle (Na-Perle im Bunsenbrenner; Q Fig. 13) als auch vor die Ableseglühlampe Stanniolschirme oder Tröge gestellt. Deshalb hat sich bei meinen Versuchen die Temperatur auch nur einmal während einer Verschiebung um $0{,}14^0$ geändert; die durchschnittliche Aenderung betrug $0{,}04^0$.

Die im vorigen Abschnitt eingeführte Streifenzahl σ war der achte oder der neunte Teil der Gesamtstreifenzahl s und

[1]) Als erste Spülflüssigkeit verwandte ich meistens die sorgfältig aufbewahrte Lösung des vorhergehenden Versuchs.

wurde bei jeder einzelnen Flüssigkeit so gewählt, dass möglichst die ganze Schraubenlänge ausgenützt wurde. Verschoben wurde immer in derselben und zwar immer in der „positiven“ Richtung. Es sei als Beispiel eine zu einer solchen Verschiebung gehörende Reihe von Ablesungen mitgeteilt.

Tabelle 1.

15 proc., eingefüllt $11^h\ 5^m$, 1. Versuch, 3. Verschiebung, $11^h\ 50^m$.

t	u	Δu	
19,04	17,0		
		614,0	e_σ = 614,05 Trommelteilen
19,06	631,0		bei 19,08°
		614,1	
19,06	1245,1		
		613,9	e_σ = 614,03 Trommelteilen
19,06	1859,0		= 1,22806 mm
		614,3	
19,06	2473,3		σ = 29
		614,1	
19,08	3087,4		q = 23,6145 mm^{-1}
		614,6	
19,08	3702,0		bei 19,21°
		613,0	
19,10	4315,0		
		614,2	
19,12	4929,2		

In der ersten Verticalreihe stehen die Temperaturen t, in der zweiten die Ablesungen u in Trommelteilen und in der dritten die Differenzen $u_2 - u_1$, $u_3 - u_2$ etc., die immer 29 Streifen entsprechen. Darauf folgt das direct aus den Werten der zweiten Reihe berechnete e_σ der Gleichung (21) und das zugehörige Mittel aus den Temperaturen. Darunter steht e_σ', an dem die Asymmetriecorrection von S. 46 angebracht ist.

Zur Bestimmung dieser Correction muss man nach (20) die Abhängigkeit der Brechungsexponenten von der Temperatur kennen. Für Wasser hat Walter[1]) eine Interpolationsformel aufgestellt; für die Kochsalzlösungen dagegen fehlt es fast völlig an genaueren Untersuchungen. Nur in einer Arbeit von van der Willigen[2]) habe ich einige Temperaturcoefficienten gefunden. Da er nach einem Bericht in den „Fortschritten der Physik“[3]) für drei Lösungen von 21,69, 22,78 und 26,58 Proc. bei der Temperatur 25,75° denselben Coefficienten $17 \cdot 10^{-5}$

1) B. Walter, Wied. Ann. **46.** p. 423. 1892.
2) V. S. M. van der Willigen, Arch. Mus. Teyl. **2.** p. 222. 1869.
3) V. S. M. van der Willigen, Fortschr. d. Physik **25.** p. 287. 1869.

angiebt, so nahm ich, bevor mir die Originalarbeit zugänglich war, diese Zahl für die 25 procentige Lösung und für 26° an und interpolirte mir eine kleine Tabelle unter der Voraussetzung, dass sich der Coefficient einer Lösung bei Temperaturänderungen um denselben Bruchteil seines Wertes ändere, um den sich bei derselben Temperaturänderung der Coefficient des Wassers ändert. Ich erhielt z. B. für 25 Proc. und 18° $13 . 10^{-5}$. Eine Durchsicht der Originalarbeit ergab nun aber, dass die so berechneten Werte, die ich meinen Correctionen zu Grunde legte, wahrscheinlich zu klein sind. van der Willigen bemerkt nämlich [1]), die annähernd 27 procentige Lösung sei völlig gesättigt gewesen, es hätten manchmal sogar im Prisma noch kleine Krystalle gelegen. Da nun die Löslichkeit des Salzes mit der Temperatur wächst, so musste mit Temperatursteigerung die Concentration zunehmen, der Brechungsexponent konnte also nicht so stark abnehmen, als es der Temperaturerhöhung entsprach, und $17 . 10^{-5}$ kann daher nur als Temperaturcoefficient der gesättigten Lösung bezeichnet werden. Bei einem zweiten Versuch mit derselben Lösung erhielt van der Willigen denn auch bei 16,55° den Wert $19{,}0 . 10^{-5}$; anscheinend sind ihm hierbei keine Kryställchen in das Prisma geraten. — Auch meine Versuche legen, wie nachher gezeigt werden soll, den Schluss nahe, dass der Temperaturcoefficient der Lösungen grösser ist. Jedenfalls aber sind derartige Ungenauigkeiten auf die Asymmetriecorrection ohne Einfluss, da diese nie mehr als höchstens $^3/_{100}$ Trommelteile in e_σ betrug. δ war $= -0{,}40$ mm, da der Keil erst in seiner 45. Umdrehung in seiner symmetrischen Stellung war.[2])

In der Tab. 1 ist nun weiter e_σ in Millimetern ausgedrückt (genau genommen in einer Einheit, die gleich dem fünffachen Schraubenwerte ist) und dann die Grösse $q = \sigma / e_\sigma$, auf die es ankommt, berechnet. An der zugehörigen Temperatur ist nun auch die vorhin mitgeteilte Correction (+ 0,13°) angebracht.

In den beiden folgenden Tabellen sind die sämtlichen so

1) l. c. p. 229.

2) Meine Vorschrift, die Planplatte und den zusammengeschobenen Doppelkeil gleich dick zu machen, war bei der Herstellung leider sehr wenig beachtet worden.

erhaltenen Grössen q[1]) mit ihren Temperaturen t angeführt. Unter „Nr.“ stehen die Nummern der Verschiebungen.

Tabelle 2.

Versuche mit 25 proc. Lösung und destillirtem Wasser.

	Nr.	25 proc.		H_2O	
		q	t	q	t
1. Versuch	1	20,8963	19,46°	27,5138	18,64°
	2	20,8936	19,27	27,5138	18,59
	3	20,8913	19,22	27,5144	18,61
2. Versuch	4	20,8762	18,53	27,5038	17,66
	5	20,8758	18,48	27,5022	17,72
	6	20,8741	18,43	27,5048	17,78
3. Versuch	7	20,8973	19,37	27,5301	19,94
	8	20,8933	19,24	27,5315	20,05
	9	20,8936	19,18	27,5335	20,09

Tabelle 3.

Versuche mit 15 proc. Lösung und destillirtem Wasser.

	Nr.	15 proc.		H_2O	
		q	t	q	t
1. Versuch	1	23,6110	19,22°	27,5305	19,72°
	2	23,6129	19,16	27,5301	19,59
	3	23,6145	19,21	27,5310	19,55
2. Versuch	4	23,6026	18,99	27,5118	18,43
	5	23,6072	18,93	27,5123	18,53
	6	23,6045	18,91	27,5138	18,58
3. Versuch	7	23,5949	18,53	27,5073	17,93
	8	23,5933	18,53	27,5083	17,96
	9	23,5983	18,50	27,5073	18,04
4. Versuch	10	23,5922	18,33	27,5043	17,73
	11	23,5903	18,33	27,5058	17,73
	12	23,5907	18,31	27,5048	17,80

1) Es ist eine Stelle mehr mitgeteilt, als üblich, da es sich noch nicht um Resultate handelt.

Aus diesem durch die Versuche gegebenen Material wurden die Brechungsexponenten des Keils und der 15 proc. Lösung berechnet. Dabei wurden immer zwei in den obigen Tabellen in einer horizontalen Reihe stehende Werte combinirt und für den Brechungsexponenten des Wassers die Zahlen von Walter[1]), für den der 25 proc. (Eich-)Lösung, wie schon erwähnt, die von Schütt verwertet. Die Schütt'schen Zahlen erforderten eine Umrechnung, da der Gehalt meiner Lösung ein etwas andrer war. Ich benutzte zu diesem Zweck die der Tab. 12 des Anhangs zu Grunde gelegte Interpolationsformel. Es ergab sich — die Bezeichnungen sind im Anhang erklärt — für die Lösung vom Gehalte 25,0042

$$\mathfrak{p} = 33{,}3408, \quad v = 1{,}366\,42.$$

Die Dichte wurde nach der Schütt'schen Interpolationsformel[2]) berechnet:

$$d\,\frac{18^0}{4^0} = 1{,}18921, \quad 1 - c = 0{,}96960,$$

und daher

$$n = 1{,}37791 \text{ bei } 18{,}07^0.$$

Zur Controle meiner Beobachtungen wurde auch der Exponent der Lösung vom Gehalte 15,0155 interpolirt. Für ihn war:

$$\mathfrak{p} = 17{,}6685, \qquad v = 1{,}35206,$$

$$d\,\frac{18^0}{4^0} = 1{,}10926, \quad 1 - c = 0{,}97902$$

und daher

$$n = 1{,}35960 \text{ bei } 18{,}07^0.$$

Es ist nun klar, dass die Berechnung von N aus den Exponenten der von mir gewählten Eichflüssigkeiten nicht sehr genau werden kann. Man erkennt dies, wenn man nicht die Gleichungen S. 32 zu Hülfe nehmen will, schon aus Formel (16), nach der N oder $N - 1$ der Quotient zweier *Differenzen* ist. Man erhielte natürlich ein viel genaueres Resultat, wenn man,

1) l. c. p. 423.
2) l. c. p. 356.

statt zu extrapoliren, interpolirte, d. h. wenn N zwischen den beiden Eichbrechungsexponenten läge und demnach als Quotient zweier Summen zu berechnen wäre. Misslich ist ferner, dass man die Eichbrechungsexponenten sehr genau kennen muss. Wie man sich leicht überzeugt, wird ein Fehler im Brechungsexponenten der Kochsalzlösung in N verdreifacht, ein Fehler im Brechungsexponenten des Wassers sogar vervierfacht.

Eben durch diese Eigentümlichkeit wurde es mir möglich, festzustellen, dass der Temperaturcoefficient der 25 proc. Lösung bei 18° grösser als $13 . 10^{-5}$ sein muss. Mit diesem Wert zwischen 18° und 19° und mit $14 . 10^{-5}$ zwischen 19° und 20° hatte ich nämlich die Brechungsexponenten der 25 proc. Lösung berechnet. Als ich nun die erhaltenen N-Werte als Ordinaten und die zugehörigen Temperaturen der Eichlösung als Abscissen eines Coordinatensystems auftrug, *wuchsen* die Ordinaten mit zunehmenden Abscissen, statt constant zu bleiben, wie es dem kleinen Temperaturcoefficienten des Glases entspricht. Dies konnte nur daher rühren, dass sich der Brechungsexponent der Eichlösung mit der Temperatur stärker ändert, als ich angenommen hatte. In der That erhielt ich mit $15 . 10^{-5}$ bei 18,5° und mit $16 . 10^{-5}$ bei 19,5° die unter „N beob." stehenden Werte der folgenden Tab. 4, bei denen nur noch eine sehr geringe Zunahme von N mit der Temperatur der Eichlösung zu bemerken ist.

Tabelle 4.

Brechungsexponent des Keiles:

$N = 1{,}518\,521 + 2{,}3 . 10^{-5} . (t - 18{,}07°)$.

Temp.	Nr.	N beob.	N ber.	Diff.
18,43°	6	1,51852	1,51853	− 1
18,48	5	58	53	+ 5
18,53	4	48	53	− 5
19,18	9	59	55	+ 4
19,22	3	52	55	− 3
19,24	8	55	55	± 0
19,27	2	55	55	± 0
19,37	7	60	55	+ 5
19,46	1	50	55	− 5

Da nun jedenfalls einem Versuche, der ohne Benutzung eines Temperaturcoefficienten direct aus dem für 18,07° geltenden Werte 1,37791 berechnet wäre, die grösste Wahrscheinlichkeit zukäme, so habe ich die erhaltenen Exponenten N durch eine lineare Function $N = a + b(t - 18{,}07^0)$ dargestellt, wo t die zugehörige Temperatur der Eichlösung ist, und die Constante $a = 1{,}51852$ als den wahrscheinlichsten Wert des Brechungsexponenten des Keils angenommen. In der Tabelle sind die aus der linearen Gleichung berechneten Werte den beobachteten gegenübergestellt. Die grösste Abweichung einer Einzelmessung ist, wie man sieht, immer noch $10 . 10^{-5}$; dem Werte $N = 1{,}51852$ ist aber jedenfalls eine grössere Genauigkeit zuzusprechen.

Bei der Bestimmung des Brechungsexponenten der 15 proc. Lösung aus den Exponenten des Wassers und des Keiles nach Gleichung (17) verhält es sich mit der Genauigkeit, die von den Eichexponenten verlangt wird, gerade umgekehrt. Ein Fehler im Brechungsexponenten des Wassers wirkt im Resultat kaum mit $^9/_{10}$ seines Wertes, ein Fehler in N gar nur mit $^1/_7$. Ausserdem tritt die in q erreichte Genauigkeit im Resultat voll in Wirksamkeit.

Ich habe aus den 12 Werten der Tab. 3 die Brechungsexponenten der 15 proc. Lösung berechnet. In der folgenden Tab. 5 sind sie mit den Temperaturen, für die sie gelten und die der Grösse nach geordnet sind, zusammengestellt. Auch hier wurden die Resultate in einer linearen Gleichung

$$n = a + b(t - 18{,}07^0)$$

zusammengefasst und die beobachteten und berechneten Zahlen einander gegenübergestellt. Die Constante $a = 1{,}35959$ ist der Brechungsexponent der Lösung bei 18,07°; sie unterscheidet sich nur um eine Einheit der fünften Decimale von dem vorhin interpolirten Werte. Die Constante $b = 15{,}0 . 10^{-5}$ ist der mittlere Temperaturcoefficient für die benutzten Temperaturen.

Tabelle 5.

Brechungsexponent der 15 proc. Lösung:
$n = 1{,}35959 - 15{,}0 \cdot 10^{-5} \cdot (t - 18{,}07^{0})$.

Temp.	Nr.	n beob.	n ber.	Diff.
18,31°	12	1,35956	1,35955	+ 1
18,33	10	54	55	− 1
18,33	11	56	55	+ 1
18,50	9	50	53	− 3
18,53	7	53	52	+ 1
18,53	8	54	52	+ 2
18,91	6	45	46	− 1
18,93	5	44	46	− 2
18,99	4	47	45	+ 2
19,16	2	42	43	− 1
19,21	3	42	42	± 0
19,22	1	43	42	+ 1

Die grösste Abweichung zweier Einzelmessungen ist also hier $5 \cdot 10^{-5}$; der mittlere Fehler der Einzelmessung ist $\pm 1{,}7 \cdot 10^{-5}$.

Ich habe schliesslich auch den Keilwinkel φ nach Gleichung (1) berechnet; er ist gleich 5° 1,0′. Genau lässt er sich nicht bestimmen, 1. weil ζ nicht gleich 90° ist, 2. weil man die Ganghöhe der Schraube und 3. weil man den Winkel zwischen der Verschiebungsrichtung und der Schraubenaxe nicht kennt.

Meine Messungen führen also zu dem *Resultat: Der Arago'sche Keilcompensator kommt* selbst in der von mir beschriebenen unvollkommenen, sozusagen improvisirten Ausführung, bei der die Gesamtverschiebung nur 1 cm beträgt, *was seine Genauigkeit betrifft, den besten der gebräuchlichen Apparate nahe.*

Man vergleiche z. B. die oft citirten Messungen von Schütt mit den meinigen. Schütt ist mit der ausgesprochenen Absicht an seine Arbeit herangetreten, „die Genauigkeit der Beobachtungen so weit zu treiben, als es mit den gegenwärtigen Hülfsmitteln überhaupt möglich ist“. Er hat die Methode des Minimums der Ablenkung benutzt. Bei der Messung des Prismenwinkels betrug die grösste Abweichung einer Einzel-

messung vom Mittelwert $\pm 4 . \sqrt{11} . 10^{-6} = 1{,}3 . 10^{-5}$, bei der Messung des Ablenkungswinkels $\pm 6 . \sqrt{9} . 10^{-6} = 1{,}5 . 10^{-5}$. Die grösste mögliche Abweichung im Brechungsexponent war also $\pm 2{,}8 . 10^{-5}$.[1]) Bei meinen Versuchen dagegen betrug die grösste Abweichung der Einzelmessung $\pm 2{,}5 . 10^{-5}$, also ungefähr ebensoviel.

Es kann nun freilich der Einwand erhoben werden, dass meine Einzelmessungen bereits aus 8—10 Einstellungen hergeleitet sind, also nicht mit denen von Schütt verglichen werden dürfen. Der Einwand ist berechtigt, es muss jedoch bemerkt werden, dass in der Formel (21) nicht alle Ablesungen mit demselben Gewicht auf das Resultat einwirken; ein aus acht oder neun Einstellungen gewonnenes e_σ kommt z. B. nur etwa zwei Einzelmessungen $(u_\nu - u_1)/s$ gleich. Ausserdem war ja nur *nahezu dieselbe* Genauigkeit beansprucht. Darüber aber kann kein Zweifel bestehen, dass *für die Genauigkeit, bis zu der man mit einem in jeder Beziehung vollendet ausgeführten Compensator von z. B. 3 cm Gesamtverschiebung vordringen kann, nur die Genauigkeit, mit der man die Brechungsexponenten der Eichflüssigkeiten kennt, massgebend sein wird.* Nennenswert mehr als die Genauigkeit der Eichflüssigkeiten kann man allerdings, so geeignet man diese auch wählen mag, nie erreichen.

Mit der Verlängerung der Gesamtverschiebung sind zwei Uebelstände verknüpft. Der eine ist der, dass dann schon das Na-Licht nicht mehr homogen genug ist. Sobald die Streifenzahl 300 übersteigt, werden die Einstellungen unsicher. Vielleicht könnte man durch ähnliche Mittel, wie sie in neuester Zeit mit besonderem Erfolg von Lummer[1]) angewendet worden sind, die Maxima der Streifen so verschärfen, dass diese „Schwebungen“ für die Beobachtung kein Hindernis mehr wären.

1) Davon, dass auch durch ungenaue Bestimmung der Temperatur Fehler auftreten konnten, sehe ich ab.

1) A. Perot u. Ch. Fabry, Ann. de chim. et phys. (7) **12.** p. 459. 1897 und **16.** p. 289. 1899; O. Lummer, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin p. 504. 1900; Verhandl. d. Deutsch. Physik. Gesellsch. **3.** p. 85 u. 131. 1901; Arch. Néerl. (2) **6.** p. 773. 1901.

Der andere Uebelstand ist der, dass bei der längeren Verschiebung sehr viele Umdrehungen nötig werden. Der Gedanke liegt nahe, diese Unbequemlichkeit dadurch zu umgehen, dass man die Verschiebung nicht durch eine Mikrometerschraube misst, sondern an einer sehr feinen Scala mit einem Mikroskop abliest. Man könnte dann durch irgend einen gröberen Bewegungsmechanismus rasch die ganze Verschiebung, vielleicht mit wenigen Zwischenstationen, durchlaufen und hätte dann nur zu der genaueren Einstellung eine feinere Schraube nötig. Die Auswechslung der beiden Bewegungsmechanismen würde wohl keine besonderen technischen Schwierigkeiten machen. Der Compensator käme dann auch an Bequemlichkeit dem Spectrometer mit seinem umständlichen Einstellungsverfahren mindestens gleich. Die Verschiebung würde jetzt direct am Verschobenen gemessen werden; an die Stelle der Schraubencorrectionen würden die Correctionen der Scala und des Ocularmikrometers treten.

Besonders geeignet ist der Compensator vermutlich für absorbirende Substanzen. Man könnte bei ihnen eine kleine capillar angesaugte Flüssigkeitsmenge zwischen den horizontal gestellten beweglichen Keil und eine in geringem Abstand darüber befestigte Planplatte bringen. Die Genauigkeit, die bei einer gewissen Schichtdicke d erreicht werden kann, ergiebt sich direct aus (1) als

$$\Delta n = \frac{\lambda}{d} \cdot \Delta s,$$

wo λ wie immer die Wellenlänge und Δs die Genauigkeit der Streifenablesung ist. Setzt man $\Delta s = 1/10$, $d = 0{,}1$ mm, so ist für Na-Licht $\Delta n = 6 \cdot 10^{-4}$. Beobachtet man dagegen mit einem Prisma bis zu einer 0,1 mm dicken Schicht, die 1 mm von der Spitze entfernt sei, so ist der Prismenwinkel etwa 5^{0}, und man muss auf 11″ ablesen, um dieselbe Genauigkeit zu erhalten, was bei der Verwaschenheit der Spectrallinien in der Nähe der Absorptionsbanden schwer zu erreichen sein dürfte.

Grundsätzliche Vorzüge sind dabei vor allem zwei: erstens hat man nirgends schmale Lichtbündel, Beugungserscheinungen können also nicht auftreten[1]); und zweitens hat man sicher

1) Vgl. A. Kundt, Pogg. Ann. **145.** p. 165. 1872.

überall dieselbe Concentration, während bei der Prismenmethode hierüber Zweifel möglich sind.

Dieselbe Versuchsanordnung wie für absorbirende Substanzen dürfte sich auch für besonders wertvolle empfehlen, da bei ihr nur sehr wenig Flüssigkeit nötig ist.

Den Jamin'schen Compensator ersetzt der Keilcompensator vollständig. Er hat den Vorteil, dass seine Verschiebung der Streifenzahl durchaus proportional, also einfacher und sicherer zu eichen ist.

Anhang.

Die Abhängigkeit der Brechungsexponenten der Salzlösungen von der Concentration.

Die Abhängigkeit der Brechungsexponenten der Salzlösungen von der Concentration wurde bisher immer von zwei verschiedenen Gesichtspunkten aus betrachtet: entweder stellte man die beobachteten Werte rein empirisch durch Interpolationsformeln dar, oder man untersuchte die Gültigkeit der sogenannten Mischungsregeln, die ja bekanntlich Beziehungen zwischen Brechungsexponent, Dichte und Concentration sind. Eine solche Scheidung mag berechtigt sein; es ist aber einleuchtend, dass eine Vereinigung der beiden Betrachtungsweisen in theoretischer und in praktischer Hinsicht von Vorteil sein muss. Ich habe mir im folgenden die Aufgabe gestellt, zu untersuchen einerseits, wie weit den Constanten der empirischen Interpolationsformeln eine physikalische Bedeutung zuzusprechen ist, und andrerseits, zu welchen Interpolationsformeln die Mischungsregeln führen.

Zunächst seien die von mir durchweg gebrauchten Bezeichnungen mitgeteilt. Ich verstehe unter p die Menge Salz, die in 100 Gewichtsteilen der Lösung enthalten ist; demnach ist $\mathfrak{p} = \frac{100\,p}{100-p}$ die Menge Salz, die in 100 Gewichtsteilen des Lösungsmittels enthalten ist. n sei der Brechungsexponent der Lösung, n_m der des Lösungsmittels, n_s der des festen Salzes,

d. d_w und d_s die entsprechenden Dichten und a, b, k und D positive Constanten.

Die Zahlen, die ich zu meinen Rechnungen benutzt habe, sind Arbeiten von Schütt[1]) und van der Willigen[2]) entnommen. Ich teile sie gleich jetzt in den folgenden beiden Tabellen mit; die Brechungsexponenten gelten durchweg für die D-Linie.

Tabelle 6.

Kochsalzlösungen nach Schütt.

Nr.	p	$\mathfrak{p}$	$d\frac{18{,}07^0}{4^0}$	n_D bei 18,07°
1	24,9886	33,3131	1,18911	1,37789
2	19,9903	24,9848	1,14821	1,36862
3	14,9921	17,6361	1,10914	1,35959
4	9,9944	11,1041	1,07124	1,35068
5	4,9970	5,2598	1,03454	1,34191
6	0	0	0,99866	1,33316

Die Brechungsexponenten sind auf Luft bezogen[3]) und nach Schütt's Angabe auf $\pm 1{,}5 \cdot 10^{-5}$ genau.

Tabelle 7.

Salmiaklösungen nach van der Willigen.

Nr.	p	$\mathfrak{p}$	$d\frac{26{,}3^0}{4^0}$	n_D bei 26,3°
1	24,83	33,032	1,06757	1,37947
2	19,68	24,502	1,05399	1,36980
3	19,58	24,347	1,05364	1,36948
4	14,51	16,973	1,04004	1,36015
5	11,79	13,366	1,03202	1,35495
6	9,72	10,766	1,02597	1,35098
7	0	0	0,99673[4])	1,33237[5])

1) F. Schütt, Zeitschr. f. physik. Chem. **5.** p. 349. 1890.
2) V. S. M. van der Willigen, Arch. Mus. Teyl. **2.** p. 222. 1869.
3) Vgl. p. 352 der Schütt'schen Arbeit.
4) Nach Landolt u. Börnstein, Tab. 13.
5) Nach Walter, Wied. Ann. **46.** p. 424. 1892.

Diese Brechungsexponenten, die bei ganz verschiedenen Temperaturen gefunden sind, wurden erst nachträglich von van der Willigen auf 26,3° umgerechnet; da die Temperaturcoefficienten nicht sehr genau bekannt waren, und da van der Willigen die Concentration nur auf zwei Decimalstellen angiebt, so sind die Zahlen wohl beträchtlich weniger genau als die von Schütt.

Die älteste Interpolationsformel für die Brechungsexponenten in ihrer Abhängigkeit von der Concentration ist die Parabelgleichung von Beer und Kremers[1]):

$$n = n_w + a \cdot \mathfrak{p} - b \cdot \mathfrak{p}^2. \tag{1}$$

Hier ist sofort klar, dass mit Ausnahme von n_w keiner der Constanten eine bestimmte Bedeutung zukommt. Insbesondere entspricht die Gleichung für $\mathfrak{p} = \infty$ nicht der Erfahrung.

Auch die Gleichungen dritten Grades von Hofmann[2]) und Börner[3]) können nur als rein empirische Interpolationsformeln angesehen werden.

Erst Walter[4]) hat ein Gesetz aufgestellt, bei dem die Constanten physikalisch gedeutet werden können. Er schloss sowohl aus den Zahlen anderer Beobachter, als auch aus seinen eigenen auf eine Beziehung:

$$n = n_w + k \cdot p, \tag{2}$$

und hier kann wenigstens formell der Constanten k, die von Walter als das Refractionsincrement bezeichnet wird, die Bedeutung

$$k = \frac{n_s - n_w}{100}$$

beigelegt werden. Freilich auch *nur* formell; denn, wie die nachfolgende Uebersicht zeigt, die mit Hülfe der von Walter selbst gegebenen Mittelwerte zusammengestellt ist, kann von einer thatsächlichen Uebereinstimmung keine Rede sein.

1) A. Beer u. P. Kremers, Pogg. Ann. **101.** p. 133. 1857.
2) K. Hofmann, Pogg. Ann. **133.** p. 575. 1868.
3) Börner, Inaug.-Diss., Marburg 1869.
4) B. Walter, Wied. Ann. **38.** p. 107. 1889.

Tabelle 8.

Salz	Nach Landolt u. Börnstein		$\frac{n_s - n_w}{100}$	k nach Walter
	n_s	n_w		
KCl	1,487	1,332	0,00155	0,00137
NaCl	1,544	1,332	0,00212	0,00177
NH_4Cl	1,642	1,332	0,00310	0,00191

Die Walter'sche Beziehung stellt übrigens auch rein empirisch die Beobachtungen nur sehr annähernd dar. Sobald man genauere Messungen heranzieht, zeigen sich bedeutende Abweichungen. Ich habe z. B. die Schütt'schen Zahlen mit der Methode der kleinsten Quadrate durch (2) dargestellt; ich fand

$$n = 1{,}33297 + 178{,}76 \,.\, 10^{-5} \,.\, p.$$

Die hiernach berechneten Werte sind in der folgenden Tabelle den beobachteten gegenübergestellt; die Differenzen überschreiten die Beobachtungsfehler ganz bedeutend.

Tabelle 9.

Nr.	p	n_D bei 18,07°		Diff. . 10^5
		berechnet	beobachtet	
1	33,3131	1,37764	1,37789	− 25
2	24,9848	1,36871	1,36862	+ 9
3	17,6361	1,35977	1,35959	+ 18
4	11,1041	1,35084	1,35068	+ 16
5	5,2598	1,34190	1,34191	− 1
6	0	1,33297	1,33316	− 19

Walter selbst hat sich in der betreffenden Arbeit auf Beobachtungen von Brechungsexponenten gestützt, die sich zum Teil voneinander um sechs Einheiten der vierten Decimale unterscheiden. Auch Bremer[1]), der in der neuesten Zeit das

1) G. J. W. Bremer, Arch. Néerl. (2) 5. (Jubelb. f. H. A. Lorentz) p. 202. 1901.

Walter'sche Gesetz bestätigt zu haben glaubt, benutzt Brechungsexponenten, die wohl nur ungefähr auf eine Einheit der vierten Decimale genau sind.

Auf ganz anderem Gebiete, nämlich auf dem der Compressibilität, haben nun Röntgen und Schneider[1]) eine *Hyperbel*gleichung benutzt, durch die sie die Compressibilität der Kochsalzlösungen in ihrer Abhängigkeit von der Concentration recht gut darstellen konnten. Die Vermutung liegt nahe, dass man vielleicht durch eine solche Darstellung in ähnlicher Weise, wie es mit den Compressibilitäten gelungen ist, den Brechungsexponenten des festen Salzes aus den Brechungsexponenten der Lösung extrapoliren könne.

Ich versuchte daher zunächst empirisch die Brechungsexponenten durch eine Gleichung von der Gestalt:

$$(3) \qquad \frac{n_s - n}{n - n_w} = \frac{D}{\mathfrak{p}}$$

darzustellen. Für die beiden Constanten n_s und n_w ergiebt sich die physikalische Bedeutung unabhängig von theoretischen Voraussetzungen nur aus der Form der Gleichung. Von der Constante D dagegen weiss man vorläufig noch nichts weiter, als dass sie die Concentration ist, zu der der Brechungsexponent $n = (n_s + n_w)/2$ gehört.

Bis zu welcher Annäherung die Brechungsexponenten durch (3) wiedergegeben werden, lassen die folgenden beiden Tabellen erkennen. Die unter „n_D berechnet" stehenden Werte wurden folgendermassen gefunden: Zuerst wurden mit der Methode der kleinsten Quadrate aus *allen* Werten der Tab. 6 und 7 (auch aus den für $\mathfrak{p} = 0$ geltenden) die Constanten n_s, n_w und D der Gleichung (3) berechnet. Dann ergaben sich die Brechungsexponenten aus der mit (3) identischen Formel:

$$(3\,a) \qquad n - 1 = \frac{(n_w - 1) \cdot D + (n_s - 1) \cdot \mathfrak{p}}{\mathfrak{p} + D} \,.$$

In den letzten Verticalreihen der Tabellen stehen die Differenzen „n beobachtet — n berechnet".

1) W. C. Röntgen u. J. Schneider, Wied. Ann. **29.** p. 193. 1886; **31.** p. 1003. 1887.

Tabelle 10.

Kochsalzlösungen nach Schütt.

Nr.	p	n_D bei 18,07°		Diff. . 10^5
		berechnet	beobachtet	
—	∞	1,53482	1,54416[1])	−934
1	33,3131	1,37786	1,37789	− 3
2	24,9848	1,36866	1,36862	+ 4
3	17,6361	1,35959	1,35959	0
4	11,1041	1,35066	1,35068	− 2
5	5,2598	1,34186	1,34191	− 5
6	0	1,33319	1,33316	+ 3

$$D = 117{,}042$$

$$100 \cdot \frac{d_s}{d_w} = 215{,}289.^{2})$$

Tabelle 11.

Salmiaklösungen nach van der Willigen.

Nr.	p	n_D bei 26,3°		Diff. . 10^5
		berechnet	beobachtet	
—	∞	1,51231	1,6422[3])	−12989
1	32,032	1,37942	1,37947	− 5
2	24,502	1,36980	1,36980	0
3	24,347	1,36961	1,36948	+ 13
4	16,973	1,36007	1,36015	− 8
5	13,366	1,35492	1,35495	− 3
6	10,766	1,35099	1,35098	+ 1
7	0	1,33238	1,33237	+ 1

$$D = 93{,}308.$$

$$100 \cdot \frac{d_s}{d_w} = 152{,}490.^{4})$$

1) Nach Langley: Landolt u. Börnstein, Tab. 153e.
2) $d_s = 2{,}1500$.
3) Nach Grailich: Landolt u. Börnstein, Tab. 153.
4) $d_s = 1{,}5200$.

Die Brechungsexponenten der Lösungen stimmen, wie man sieht, ziemlich gut überein, jedenfalls besser, als die nach dem Walter'schen Gesetze berechneten. Dass bei NH_4Cl etwas grössere Differenzen auftreten, das hat zwei Gründe: erstens sind die Zahlen von van der Willigen an sich weniger genau, und zweitens gehört die Lösung Nr. 3, die offenbar die Hauptschuld trägt, einer ganz anderen Versuchsreihe van der Willigen's an.[1])

Hinsichtlich der physikalischen Bedeutung ihrer Constanten scheint sich die Hyperbelgleichung (3) nur beim NaCl einigermassen der Erfahrung anzuschliessen (vgl. die Tabellen 10 und 11). n_w allerdings zeigt einfach deshalb, weil die unmittelbar beobachteten Brechungsexponenten des Wassers bei der Constantenbestimmung mit benutzt wurden, nur geringe Abweichungen, n_s aber, d. h. der zu $p = \infty$ gehörende Brechungsexponent, stimmt bei NH_4Cl noch ungefähr ebenso schlecht wie beim Walter'schen Gesetz.

Wie steht es nun mit der Bedeutung der Constanten D? Röntgen und Schneider haben für die Compressibilität die Hyperbelgleichung (3) aus einer den Mischungsregeln der Optik verwandten Beziehung abgeleitet und auf diesem Wege für D den Wert $100 . d_s/d_w$ gefunden. Die Entwicklungen seien hier kurz wiedergegeben; sie gelten freilich, wie die Verfasser ausdrücklich hervorheben, nur, wenn die mit der Auflösung verbundene Contraction zu vernachlässigen ist. Ich setze für die Compressibilitäten sofort überall die Brechungsexponenten und führe auch sonst meine Bezeichnungen ein.

Entsprechend der Grundannahme von Röntgen und Schneider mache ich versuchsweise die Hypothese, der Brechungsexponent einer Lösung setze sich aus den Brechungsexponenten des festen Salzes und des Lösungsmittels zusammen entsprechend den Volumina, die diese beiden Stoffe in der Lösung einnehmen. Bezeichnet man diese Volumina mit v und wendet man dieselben Indices an wie bei n, so lautet die Ausgangsgleichung von Röntgen und Schneider, auf die Brechungsexponenten übertragen:

$$n . v = n_w . v_w + n_s . v_s . \tag{4}$$

1) Vgl. l. c. p. 231.

Nun ist aber

(5) $$v = v_w + v_s$$

und nach der Definition von $\mathfrak{p}$:

(6) $$\mathfrak{p} = 100 \cdot \frac{v_s d_s}{v_w d_w} = D \cdot \frac{v_s}{v_w},$$

wo $100 \cdot d_s / d_w = D$[1]) gesetzt ist. Combinirt man diese beiden Gleichungen (5) und (6) mit (4), so erhält man leicht die Hyperbelgleichung (3) in der ihr von Röntgen und Schneider gegebenen Gestalt:

$$(n - n_s)(D + \mathfrak{p}) = (n_w - n_s) \cdot D.$$

Ist die Contraction nicht zu vernachlässigen — und sie ist es bekanntlich in den seltensten Fällen —, so ändert das zwar an der Gleichung (6) nichts (unter v_w und v_s sind nun scharf die Volumina des Lösungsmittels und des Salzes *vor* der Auflösung zu verstehen), die Gleichung (5) dagegen und damit die ganze Ableitung verlieren ihre Gültigkeit.

Man kann dann auch umgekehrt aus dem Bestehen der Hyperbelgleichung nicht mehr auf Gleichung (4) oder auf ein anderes einfaches Gesetz schliessen. Braun[2]) hat dies für die Compressibilitäten direct gezeigt. Er setzte in (4) die beobachteten Compressibilitäten (an Stelle von n) und die aus den Dichten von Salz und Wasser und aus dem Gehalt berechneten Volumina ein und fand, wie nach obigem vorauszusehen war, dass die der Gleichung (4) entsprechende Beziehung zwischen den Compressibilitäten auch nicht annähernd die Thatsachen wiedergiebt. Eine Folge davon ist auch, dass die nach (6) als $100 \cdot d_s / d_w$ berechnete Constante D etwa 5 mal so gross ist, wie die aus den Versuchen hergeleitete, ein Widerspruch, der ebenfalls von Braun zuerst constatirt worden ist. Bei den Brechungsexponenten sind, wie die Tabellen 10 und 11 zeigen, die Unterschiede zwischen D und $100 \cdot d_s / d_w$ nicht ganz so gross; immerhin sind sie gross

1) In der Bezeichnungsweise von Röntgen und Schneider ist die Constante $D = a \cdot A \cdot 10^{-4}$, wo a eine andere Constante und A das Moleculargewicht des betreffenden Salzes ist.

2) F. Braun, Wied Ann. 32. p. 505. 1887.

genug, um zu zeigen, dass die Constante D der Hyperbelgleichung theoretisch nicht in dieser einfachen Weise gedeutet werden darf.

Man überzeugt sich übrigens auf Grund der Zahlen von Röntgen und Schneider leicht, dass die Compressibilität auch bei Berücksichtigung der Volumenänderung keiner Mischungsregel, also z. B. auch keinem der Landolt'schen Formel entsprechend gebauten Ausdruck folgt.[1])

Der Hyperbelgleichung (3) liegt also kein einfaches Gesetz zu Grunde; sie ist nur eine sehr brauchbare Interpolationsformel. Ich schlage jetzt den umgekehrten Weg ein und untersuche, ob man, ausgehend von den Mischungsregeln der Optik als von mehr oder weniger einfachen Gesetzen, zu neuen und praktisch verwertbaren Interpolationsformeln kommen kann.

Die allgemeine Mischungsregel von Biot und Arago hat die Gestalt:

(7) $$\frac{N}{d} \cdot 100 = \frac{N_s}{d_s} \cdot p + \frac{N_w}{d_w} \cdot (100 - p)$$

oder auch

(7a) $$N \cdot v = N_s \cdot v_s + N_w \cdot v_w,$$

wobei im besonderen

$$N = n - 1 \text{ (nach Beer und Landolt)}$$

oder

$$N = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \text{ (nach Lorentz und Lorenz)}$$

oder

$$N = \frac{n^2 - 1}{n^2 + x} \text{ (nach Ketteler)}$$

zu setzen ist. Unter den Volumina v_s und v_w sollen jetzt immer die der unvereinigten Substanzen verstanden werden.

(7) ist eine Gleichung mit drei Variabeln: N, d, p. Statt d führe ich die Contraction c ein. Ich definire sie durch die Gleichung

(8) $$c = \frac{d - d_v}{d},$$

wobei

$$d_v = \frac{\text{Masse der Lösung}}{v_s + v_w}$$

sein soll. Es ist also

1) Vgl. J. Drecker, Wied. Ann. **34.** p. 965. 1888.

$$c = \frac{\frac{1}{v} - \frac{1}{v_s + v_w}}{\frac{1}{c}}$$

oder

$$v = (v_s + v_w)(1 - c).$$

Daher wird (7a) zu

$$N(v_s + v_w)(1 - c) = N_s \cdot v_s + N_w \cdot v_w .$$

Nun ist

$$\mathfrak{p} = 100 \cdot \frac{v_s d_s}{v_w d_w},$$

also

$$\frac{v_s}{v_w} = \frac{\mathfrak{p}}{100} \cdot \frac{d_w}{d_s} = \frac{\mathfrak{p}}{D},$$

wenn wie früher

(9) $$D = 100 \cdot \frac{d_s}{d_w}$$

gesetzt wird. Man erhält daher

$$N(\mathfrak{p} + D)(1 - c) = N_s \cdot \mathfrak{p} + N_w \cdot D$$

und hieraus folgt:

$$\mathfrak{p}\{N(1 - c) - N_s\} + D\{N(1 - c) - N_w\} = 0$$

oder

(10) $$\frac{N_s - N(1 - c)}{N(1 - c) - N_w} = \frac{D}{\mathfrak{p}}.$$

Diese Gleichung, die als blosse Umformung mit der allgemeinen Mischungsregel identisch ist, deckt den Zusammenhang zwischen dieser und den Interpolationsformeln auf. Nimmt man für N den Wert von Beer und Landolt und vernachlässigt man die Contraction, so erhält man aus (10) die Hyperbelgleichung (3), setzt man ausserdem noch $D = 100$, so ergiebt sich die Walter'sche Beziehung.[1])

Führt man

(11) $$N(1 - c) = N \cdot \frac{d_v}{d} = N_v$$

ein, sodass

(10a) $$\frac{N_s - N_v}{N_v - N_w} = \frac{D}{\mathfrak{p}}$$

---

1) Man erkennt dies, indem man $\mathfrak{p}$ durch p ersetzt, oder einfacher, indem man bedenkt, dass D die Concentration ist, für die

$$n = \frac{n_s + n_w}{2}$$

wird.

ist, und nimmt man an, der Quotient N/d sei constant, so kann man den Inhalt der Gleichung (10) auch so aussprechen: Wäre es möglich, auf irgend eine Weise die bei der Auflösung eines Salzes auftretende Contraction zu verhindern, so könnte man das sich so ergebende Brechungsvermögen N_v in seiner Abhängigkeit von der Concentration $\mathfrak{p}$ durch eine Hyperbelgleichung darstellen.

Ich habe mich mit den Bezeichnungen d_v und N_v an Pulfrich[1]) angeschlossen, der bekanntlich die Regel von Biot und Arago dadurch verallgemeinert, dass er

$$\frac{N - N_v}{N} = \alpha \cdot \frac{d - d_v}{d} \tag{11a}$$

setzt, statt die Constanz des Quotienten N/d anzunehmen. Pulfrich verfährt dabei insofern umgekehrt wie ich, als er N_v durch die direct aus (10a) folgende Gleichung

$$N_v(v_s + v_w) = N_s \cdot v_s + N_w \cdot v_w$$

definirt, während bei mir die Gleichung (10a) Behauptung und die der Pulfrich'schen Regel (11a) entsprechende Beziehung (11) Definition ist.

Beschränkt man sich auf die Landolt'sche Form der Mischungsregel und definirt man eine Grösse ν durch

$$\nu = 1 + (n - 1)(1 - c), \tag{12}$$

so wird (10) zu

$$\frac{n_s - \nu}{\nu - n_w} = \frac{D}{\mathfrak{p}}. \tag{13}$$

Es ist hierbei wohl zu beachten, dass die Contraction c gerade so wie die sonst eingeführte Dichte d durchaus keine Constante, sondern eine Function des Gehaltes $\mathfrak{p}$ ist. Erst wenn man in (10) c durch $\mathfrak{p}$ ausdrückt, bekommt man eine Gleichung zwischen n und $\mathfrak{p}$ allein. Ich führe dies nicht aus, sondern bemerke nur, dass eine Beziehung zwischen c und $\mathfrak{p}$, die für jedes $\mathfrak{p}$ gelten soll, mindestens vom dritten Grade sein muss. Denn die Contraction ist sowohl für das reine Lösungsmittel, für das $\mathfrak{p} = 0$ ist, als auch für das feste Salz, für das $\mathfrak{p} = \infty$ ist, gleich Null; und diese Bedingungen sind durch eine Gleichung zweiten Grades nicht zu erfüllen. Man kann z. B.

$$c = \frac{k_1 \cdot \mathfrak{p}}{1 + k_2 \cdot \mathfrak{p}^2}$$

1) C. Pulfrich, Zeitschr. f. phys. Chem. 4. p. 561. 1889.

setzen; zwischen n und p bekommt man dann eine recht complicirte Gleichung vierten Grades. Es hat jedoch keinen Zweck, dies weiter zu verfolgen; man kann (13) viel besser dadurch an der Erfahrung prüfen, dass man zu jedem n das v berechnet und die v dann durch (13) darstellt.

Eine solche Prüfung der Landolt'schen Mischungsregel — im Grunde genommen ist es ja nichts anderes — unterscheidet sich wesentlich von der sonst üblichen Rechenmethode. Man pflegt bekanntlich folgendermassen zu verfahren[1]): Entweder berechnet man die specifische Refraction N_s/d_s des festen Salzes aus immer drei zusammengehörigen Werten n, d, p und sieht zu, wie weit die so erhaltenen Refractionen untereinander übereinstimmen. d_w und n_w werden dabei der unmittelbaren Beobachtung entnommen. Oder man bestimmt den Brechungsexponenten n einer Lösung aus den dazu gehörenden Werten d und p und untersucht, wie weit die so berechneten Exponenten mit den beobachteten übereinstimmen. In diesem zweiten Falle muss man ausser d_w und n_w auch noch den Quotienten N_s/d_s kennen. Man entnimmt ihn am besten *nicht* der unmittelbaren Beobachtung — die Uebereinstimmung wäre zu mangelhaft —, sondern, wie es z. B. Schütt in seiner oft citirten Arbeit gethan hat, der gerade eben erwähnten ersten Berechnung.

Bei der hier vorgetragenen Methode entnimmt man nur d_s und d_w, zur Bestimmung von v aus n nämlich, der unmittelbaren Beobachtung, n_s, n_w und D dagegen extrapolirt man empirisch aus den Brechungsexponenten der Lösungen. Man erhält so mit der Methode der kleinsten Quadrate Interpolationsformeln, die (von sehr verdünnten Lösungen abgesehen) zu jedem vorgegebenen p das zugehörige v bis auf $\pm 1.10^{-5}$ genau zu berechnen gestatten. Aus v kann man dann nach (12) sehr leicht n finden, wenn man die Contraction kennt.[2])

Solange man nur den praktischen Zweck der Berechnung von n verfolgt, ist es auch ziemlich einerlei, wie gross man

1) Ich sehe davon ab, dass man oft auch Wasser und eine concentrirte Lösung als die Componenten der Mischung ansieht.

2) Eine Interpolationsformel für die Dichte, wie sie z. B. von Schütt p. 356 gegeben wird, kann zur Berechnung der Contraction dienen.

bei der Berechnung der Contraction d_s und d_w nimmt. Sollen dagegen zugleich die Exponenten n_s und n_w und die Constante D den unmittelbar beobachteten Werten nahe kommen, so müssen d_s und d_w in ganz bestimmter Weise gewählt werden.

Meine Berechnungen, die sich ausschliesslich auf die allein genau genug untersuchten Kochsalzlösungen von Schütt beziehen, zeigen dies deutlich.

Es wurde immer zuerst $1 - c$ bestimmt, und zwar nach der Gleichung

$$1 - c = \frac{d_s\, d_w\,(100 + \mathfrak{p})}{d\,(100\, d_s + \mathfrak{p}\, d_w)},$$

die aus (8) und aus der Definition von d_v folgt. Dann wurden die nach (12) berechneten Grössen v mit der Methode der kleinsten Quadrate durch (13) dargestellt. Dabei wurden im Gegensatz zu den früheren Berechnungen nur die Werte 1 bis 5 benutzt, also nicht nur n_s, sondern auch n_w wirklich *extra*polirt.

Zunächst setzte ich $d_s = 2{,}15$ und $d_w = 0{,}99866$. Den ersten Wert findet man in den Tabellen[1]) für die Dichte des Natriumchlorids, der zweite ist der Tab. 6 entnommen. Die Rechnungen wurden natürlich immer so durchgeführt, als ob d_s auf mindestens vier Decimalen genau wäre. Es ergab sich:

Tabelle 12.

Nr.	$\mathfrak{p}$	$1 - c$	ν_D bei 18,07°		Diff. $\cdot 10^5$
			ber.	beob.	
—	∞	1,00000	1,56257	1,54416	+1841
1	33,3131	0,96958	1,36640	1,36639	+ 1
2	24,9848	0,97398	1,35902	1,35903	− 1
3	17,6361	0,97895	1,35203	1,35202	+ 1
4	11,1041	0,98492	1,34540	1,34539	+ 1
5	5,2598	0,99182	1,33910	1,33911	− 1
6	0	1,00000	1,33312	1,33316	− 4

$$D = 196{,}386.$$

$$100 \cdot \frac{d_s}{d_w} = 215{,}289.$$

Die beobachteten und die berechneten Werte von ν stimmen also zwischen $p = 5$ und $p = 25$ bis auf $\pm 1 \cdot 10^{-5}$

1) Z. B. bei Landolt u. Börnstein, 2. Aufl. Tab. 62h.

überein. Zwischen $p = 5$ und $p = 0$ ist die Uebereinstimmung deshalb schlechter, weil die Beobachtung 6 der Tab. 6 zu der Bestimmung der Constanten nicht herangezogen worden ist.

Es muss ja freilich zugestanden werden, dass die Bestimmung von n nach dieser Methode etwas mühsam ist. Dafür übertrifft sie aber auch die übrigen Methoden an Genauigkeit, vorausgesetzt, dass durch die Umrechnung von v auf n keine neuen Fehler entstehen. Schütt z. B. hat nach der vorhin erwähnten Methode direct aus der Mischungsregel die Brechungsexponenten seiner Lösungen berechnet und eine grösste Abweichung von 11 Einheiten der fünften Decimalstelle bekommen. Das ist kaum die Genauigkeit der Hyperbelgleichung (3) (Tab. 10). Erst durch die Pulfrich'sche Beziehung konnte er die Fehler bis auf etwa $\pm 1 . 10^{-5}$ herabdrücken. Bedingung war dabei freilich, dass er sein N_v nicht aus den Brechungsexponenten des Wassers und des festen Salzes, sondern aus denen des Wassers und einer concentrirten Lösung berechnete, wie denn überhaupt die Pulfrich'sche Beziehung vor allem für Mischungen aufgestellt ist.

Mein Ziel war nun, die extrapolirten Constanten n_s, n_w und D mit der Erfahrung in Einklang zu bringen. Zunächst versuchte ich das durch Variiren von d_s zu erreichen. Um einen Anhalt zu haben, berechnete ich direct aus der Mischungsregel zu allen fünf Gruppen n, d, p mit $n_s = 1{,}54400$, $n_w = 1{,}33316$ und $d_w = 0{,}99866$ das entsprechende d_s. Ich erhielt die fünf Werte:

2,0124,
2,0090,
2,0074,
2,0056,
2,0031,

deren Mittel 2,0075 ich dann der nächsten v-Berechnung zu Grunde legte. Für d_w wurde 0,99866 beibehalten. Es ergaben sich jedoch für die Constanten die Werte:

$$n_s = 1{,}52669,$$
$$n_w = 1{,}33313,$$
$$D = 182{,}968;$$

die Vorausberechnung von d_s ist also ganz erfolglos gewesen. Allerdings ist nun (13) mit $n_s = 1{,}54400$, $n_w = 1{,}33316$ und

$D = 100 . 2{,}0075/0{,}99866$ für $\mathfrak{p} = 17{,}6361$ fast genau erfüllt weil bei dieser Concentration das berechnete $d_s = 2{,}0074$ nur sehr wenig von dem Mittelwerte 2,0075 abweicht. Da aber die übrigen Einzelwerte d_s sich sehr stark vom Mittelwert unterscheiden, mussten n_s, n_w und D schliesslich bei der Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate doch wieder ganz andere Werte annehmen.

Ich versuchte nun noch durch Variiren von d_w die Abweichungen der berechneten d_s-Werte zu verkleinern. Dies ist jedoch nicht gelungen. Solange $d_w = 0{,}99866$ ist, wird, wie aus den vorhin mitgeteilten fünf Werten hervorgeht, d_s mit abnehmender Concentration kleiner, mit der Verkleinerung von d_w aber beginnt d_s sehr bald bei den geringen Concentrationen mit abnehmender Concentration zu steigen, sodass bei den mittleren Concentrationen ein Minimum liegt. Absolut constant wird d_s nie. Für $d_w = 0{,}99847$ z. B. habe ich erhalten:

2,01460,
2,01197,
2,01151,
2,01168,
2,01467.

Die mit dem Mittel dieser Reihe: 2,01289 und mit $d_w = 0{,}99847$ berechneten Constanten n_s, n_w und D stimmten denn auch mit den direct beobachteten ebensowenig überein, wie die vorher gefundenen. Es war:

$n_s = 1{,}52813,$
$n_w = 1{,}33308,$
$D = 183{,}630.$

Es ist also nicht möglich, die Beobachtungen in völlig befriedigender Weise durch (13) darzustellen, und zwar offenbar deshalb, weil die Landolt'sche Mischungsregel kein *durchaus* präciser Ausdruck der Thatsachen ist. Man kann aber durch ein geeignetes d_s — also durch Probiren — und dadurch, dass man bei der Bestimmung der Constanten den direct beobachteten Brechungsexponenten des Lösungsmittels mit benutzt, erreichen, dass wenigstens n_s und n_w sehr gut übereinstimmen. Man hat dann eine Formel, die in Verbindung mit einer Interpolationsformel für die Dichte oder für die Contraction zu jedem $\mathfrak{p}$ von 0 bis ∞ das entsprechende n

mit beträchtlicher Genauigkeit liefert. Ich bin diesem Ziel mit $d_s = 2{,}0770$ und $d_w = 0{,}99866$ und den (übrigens nur aus den Beobachtungen 1—5 hergeleiteten) Constanten:

$$n_s = 1{,}54325,$$
$$n_w = 1{,}33313,$$
$$D = 188{,}495$$

am nächsten gekommen.

D freilich wird, wenigstens bei NaCl, immer einen von $100 \cdot d_s/d_w$ verschiedenen Wert haben. Es ist auffallend, dass die Differenzen zwischen den interpolirten und den theoretisch berechneten Werten D alle annähernd gleich gross sind, wie die folgende Tabelle zeigt.

Tabelle 13.

d_s	d_w	D ber.	$100 \cdot \frac{d_s}{d_w}$	Diff.
2,15000	0,99866	196,386	215,289	−18,903
2,07700	0,99866	188,495	207,979	−19,484
2,01289	0,99847	183,630	201,597	−17,967
2,00750	0,99866	182,968	201,019	−19,051

Bei der Dürftigkeit des von mir benutzten Beobachtungsmaterials ist es wohl nicht angebracht, diese Erscheinung weiter zu verfolgen.

Zum Schlusse spreche ich meinen verehrten Lehrern, Hrn. Geheimrat Prof. Dr. Röntgen und Hrn. Prof. Dr. Zehnder, für ihre liebenswürdige Unterstützung bei der vorliegenden Arbeit meinen wärmsten Dank aus.

München, Physik. Inst. d. Univ.

Lebenslauf.

Ich wurde geboren am 6. August 1876 in Oppenheim a/Rh. als Sohn des Kaufmanns Ferdinand Wallot, besuchte die Gymnasien in Mainz und in Darmstadt und studirte auf den Universitäten in Leipzig, Strassburg, Würzburg und München. Die der eingereichten Arbeit zu Grunde liegenden Versuche führte ich im physikalischen Institut der Münchner Universität aus.

J. Wallot.